Математический семинар
Института Транспорта и Связи

МАТРИЧНАЯ ЭКСПОНЕНТА И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЯ

А.М. Андронов

Содержание

1. СКАЛЯРНАЯ ЭКСПОНЕНТА

Экспоненциальная функция неотрицательной переменной x может быть определена различными способами. Для наших последующих целей используем разложение в ряд:

$$\exp(cx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(cx)^n, \quad x \geq 0, \tag{1.1}$$

где c - скалярный параметр.

Покажем, что экспоненциальная функция конечна при любых конечных значений c и x

Пусть целое κ такое, что $q = /cx//k < 1$. Тогда

$$\left|\exp(cx)\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(cx)^n\right| \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left|cx\right|^n = \sum_{n=0}^{k}\frac{1}{n!}\left|cx\right|^n + \sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left|cx\right|^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{k}\frac{1}{n!}\left|cx\right|^n + \frac{1}{k!}\left|cx\right|^k \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)\ldots(k+m)}\left|cx\right|^m <$$

$$< \sum_{n=0}^{k}\frac{1}{n!}\left|cx\right|^n + \frac{1}{k!}\left|cx\right|^k \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^m}\left|cx\right|^m <$$

$$< \sum_{n=0}^{k}\frac{1}{n!}\left|cx\right|^n + \frac{1}{k!}\left|cx\right|^k \sum_{m=1}^{\infty} q^m = \sum_{n=0}^{k}\frac{1}{n!}\left|cx\right|^n + \frac{1}{k!}\left|cx\right|^k \frac{q}{1-q} < \infty. \ \#$$

Приведенное доказательство показывает, как можно оценить отбрасываемую сумму, если ограничиться $\kappa>/xc/$ слагаемыми:

$$\left|\exp(cx) - \sum_{n=0}^{k}\frac{1}{n!}\left|cx\right|^n\right| < \frac{1}{k!}\left|cx\right|^k \frac{q}{1-q} < \infty. \qquad (1.2)$$

Производная в точке x

$$\frac{\partial}{\partial x}\exp(cx) = c\exp(cx), \quad x \ge 0, \tag{1.3}$$

поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x}\exp(cx) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1}{\Delta x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{n!}\left((x+\Delta x)^n - x^n\right)\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1}{\Delta x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^n}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \Delta x^{n-k} - x^n\right)\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1}{\Delta x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^n}{n!}\left(x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + \Delta x^n - x^n\right.\right.$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^n}{n!}nx^{n-1} = c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1} = c\exp(cx), \quad x \ge 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} \exp(cx) = c^k \exp(cx), \quad k = 1, \ 2, \ldots; x \geq 0. \qquad (1.4)$$

Из (1.3) видно, что экспоненту $f(x)$ = exp(x) изначально можно определить как функцию, производная которой совпадает со значением функции. Следовательно, для этой функции производные всех порядков совпадают. Теперь из разложения её в ряд Тейлора следует, что она представима в виде (1.1). Итак, два рассмотренных способа определяют одну и ту же функцию.

При $c = x = 1$ получаем определение экспоненты $e = 2.718281828...$, введенной Эйлером. Нам осталось показать, что рассматриваемая экспоненциальная функция является показательной e^x у которой основание равно e, а показатель x. Но это сразу следует из того, что показательная функция e^x и её производная совпадают.

Теперь из известных свойств степенной функции следует что

$$\begin{aligned}&\exp(x)\exp(y) = \exp(y)\exp(x) = \exp\left(x + y\right),\\&\exp(x)^k = \exp(kx), \quad \exp(x)^{-1} = \exp(-x).\end{aligned} \qquad (1.5)$$

Конечно, все эти свойства можно вывести из определения (1.1), но это довольно трудоёмко.

2. МАТРИЧНАЯ ЭКСПОНЕНТА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть A - квадратная матрица размера κ. По аналогии со скалярным случаем, определим матричную экспоненту следующим образом [Беллман Р. (1969)]:

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \ . \tag{2.1}$$

Отметим, во первых, что это представление всегда даёт конечное значение. Действительно, если в последнюю формулу вместо A подставить любую норму матрицы, то будет иметь ранее рассмотренный случай скалярного представления экспоненты.

Приведём важное отношение, выражающее матричную экспоненту через собственные числа и вектора матрицы A [Беллман Р. (1969)]. Напомним, что χ_* называется *собственным числом* матрицы A, отвечающим *собственному вектору* β_*, если

$$A\beta_* = \chi_* \beta_*. \tag{2.2}$$

Оказывается, что число собственных чисел (с учётом их кратности), равно размерности матрицы. Из определения (2.2) следует, что собственные вектора определяются с точностью до скалярного множителя. Обычно его выбирают так, чтобы норма векторов равнялась единице:

$$\beta_*^T \beta_* = 1. \tag{2.3}$$

Собственные числа и вектора вычисляются во многих компьютерных программах. Мы будем рассматривать наиболее часто встречающийся на практике случай, когда все собственные числа – разные. Будем их обозначать $\chi_1,...,\chi_k$, а вектор, составленных из них, $\chi = (\chi_1,...,\chi_k)^T$.

Пусть T есть матрица, столбцами которой являются собственные вектора: $T = (\beta_1,...,\beta_k)$. Если $diag(\chi)$ означает диагональную матрицу с диагональю $\chi = (\chi_1,...,\chi_k)$, то определение (2.2) можно представить в матричной форме как

$$AT = Tdiag(\chi). \qquad (2.4)$$

Умножая эту формулу слева и справа на обратную матрицу T^{-1}, получаем так называемое *разложение квадратной матрицы*

$$T^{-1}AT = diag(\chi),$$
$$A = Tdiag(\chi)T^{-1} \qquad (2.5)$$

Далее используется тот факт, что $TT^{-1} = T^{-1}T = I$. Учитывая это и подставляя выражение (2.5) в (2.1), находим:

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(T diag(\chi) T^{-1} \right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(T diag(\chi)^n T^{-1} \right) = T \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} diag(\chi)^n \right) T^{-1} =$$

$$= T \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} \chi_1{}^n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \chi_2{}^n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \chi_{k-1}{}^n & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \chi_k{}^n \end{pmatrix} \right) T^{-1} =$$

$$= T diag\left(\exp(\chi_1) \dots \exp(\chi_k) \right) T^{-1}.$$

Окончательно

$$\exp(A) = T diag\left(\exp(\chi_1),\ldots,\exp(\chi_k)\right)T^{-1}. \qquad (2.6)$$

Это фундаментально соотношение будет многократно использоваться в дальнейшем.

Для транспонированной матрицы A^T имеем:

$$\exp(A^T) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(A^T\right)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n\right)^T = \exp(A)^T = \qquad (2.7)$$

$$= \left(T^{-1}\right)^T diag\left(\exp(\chi_1),\ldots,\exp(\chi_k)\right)T^T.$$

Следовательно, матричная экспонента для транспонированной матрицы A^T имеет те же, что и для A, собственные числа, а её собственные вектора – это строки матрицы T^{-1}, обратной к матрице T, составленной из собственных векторов матрицы A.

Точность аппроксимации матричной экспоненты конечным рядом иллюстрируется на следующем примере.

Precision of Exponential Approximation

1. Initial data: Matrix of constants A

$$A := \begin{pmatrix} -0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & -0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}$$

States number

$k := \mathrm{rows}(A) \qquad k = 3$

2. Classical representation

2.1 Vector of Eigevalues:

$$\chi(A) := \mathrm{eigenvals}(A)$$

$$\chi(A)^T = (1.136 \quad -0.656 \quad -0.28)$$

$$\mathrm{exp}\chi(A) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..2 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \lambda \leftarrow \chi(A)_i \\ R_i \leftarrow \exp(\lambda) \end{array} \right. \\ R \end{array} \right.$$

2.2. Matrix of eigenvectors:

$$T(A) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..k-1 \\ \quad R^{\langle i \rangle} \leftarrow \mathrm{eigenvec}\left(A, \chi(A)_i\right) \\ R \end{array} \right.$$

$$\mathrm{exp}\chi(A)^T = (3.115 \quad 0.519 \quad 0.755)$$

$$\mathrm{exp}\chi(A)_2 = 0.755$$

2.3. Presentation:

$$\mathrm{MatrExpCl} := T(A)\cdot \mathrm{diag}(\mathrm{exp}\chi(A))\cdot T(A)^{-1}$$

3. Representation by means of on series

$$\mathrm{MatrExpS}(A, k) := \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{1}{i!} \cdot A^{i} \right)$$

4. Comparison

$$\mathrm{MatrExpCl} = \begin{pmatrix} 0.59 & 0.117 & 0.298 \\ 0.194 & 0.908 & 0.513 \\ 0.467 & 0.671 & 2.891 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{MatrExpS}(A, 2) = \begin{pmatrix} 0.62 & 0.1 & 0.255 \\ 0.165 & 0.89 & 0.44 \\ 0.4 & 0.575 & 2.59 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{MatrExpS}(A, 3) = \begin{pmatrix} 0.582 & 0.115 & 0.288 \\ 0.192 & 0.902 & 0.493 \\ 0.451 & 0.645 & 2.811 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{MatrExpS}(A, 3) = \begin{pmatrix} 0.582 & 0.115 & 0.288 \\ 0.192 & 0.902 & 0.493 \\ 0.451 & 0.645 & 2.811 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{MatrExpS}(A, 4) = \begin{pmatrix} 0.59 & 0.116 & 0.295 \\ 0.193 & 0.907 & 0.509 \\ 0.463 & 0.665 & 2.874 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{MatrExpS}(A, 5) = \begin{pmatrix} 0.59 & 0.117 & 0.297 \\ 0.194 & 0.908 & 0.512 \\ 0.466 & 0.67 & 2.888 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{MatrExpS}(A, 6) = \begin{pmatrix} 0.59 & 0.117 & 0.298 \\ 0.194 & 0.908 & 0.513 \\ 0.467 & 0.671 & 2.891 \end{pmatrix}$$

3. МАТРИЧНАЯ ЭКСПОНЕНТА. СВОЙСТВА

Свойство 1. Матрицы A и $\exp(A)$ коммутативны.

Доказательство. Пусть I - единичная матрица размера
По определению (2.1)

$$A\exp(A) = A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n = AI + A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n =$$

$$= A + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n\right)A = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n\right)A = \exp(A)A. \ \#$$

Свойство 2. Если все собственные числа $\chi_1,\ldots,\chi_k$ матрицы A разные, то матричная экспонента (2.1) является невырожденной. Обратной к ней является матрица

$$(\exp(A))^{-1} = \exp(-A) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \exp(-\chi_i)\tilde{\beta}_i = \\ = T diag(\exp(-\chi_1),\ldots,\exp(-\chi_k))T^{-1}. \quad (3.1)$$

Отсюда и из (2.6) следует, что если существует матрица обратная к $\exp(A)$, то её собственные вектора те же, а собственные числа – это собственные числа матрицы $\exp(A)$ с обратным знаком.

Доказательство.

$$\exp(A)\exp(-A)=\sum_{i=1}^{k}\beta_i\exp(\chi_i)\tilde{\beta}_i\sum_{j=1}^{k}\beta_j\exp(-\chi_j)\tilde{\beta}_j=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\beta_i\exp(\chi_i)\tilde{\beta}_i\beta_j\exp(-\chi_j)\tilde{\beta}_j=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\beta_i\exp(\chi_i)\delta_{i,j}\exp(-\chi_j)\tilde{\beta}_j=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\beta_i\exp(\chi_i)\exp(-\chi_i)\tilde{\beta}_i=\sum_{i=1}^{k}\beta_i\tilde{\beta}_i=TT^{-1}=I.\ \#$$

Свойство 3. Если матрицы A и B коммутативны, то

$$\exp(A+B)=\exp(A)\exp(B)=\exp(B)\exp(A)\ . \qquad (3.2)$$

Доказательство. По определению (1)

$$\exp(A+B)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(A+B)^n .$$

Используя свойство коммутативности $A\ B\ =\ B\ A$, получаем

$$\exp(A+B)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(A+B)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{n!}{\nu!(n-\nu)!}A^{\nu}B^{n-\nu}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\nu!(n-\nu)!}A^{\nu}B^{n-\nu}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}A^{\nu}\sum_{n=\nu}^{\infty}\frac{1}{(n-\nu)!}B^{n-\nu}=$$

$$=\exp(A)\exp(B)=\exp(B)\exp(A).\#$$

Предостережение: в общем случае формула (3.2) не верна.

Свойство 4. Если $f(t)$ есть дифференцируемая аргументу t скалярная функция, то

$$\frac{\partial}{\partial t}\exp(f(t)A) = A\exp(f(t)A)\frac{\partial}{\partial t}f(t) = \exp(f(t)A)A\frac{\partial}{\partial t}f(t). \qquad (3.3)$$

В частности,

$$\frac{\partial}{\partial t}\exp(tA) = A\exp(tA) = \exp(tA)A. \qquad (3.4)$$

Доказательство. По определению (2.1)

$$\frac{\partial}{\partial t}\exp(f(t)A) = \frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\big(f(t)A\big)^n = \frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n f(t)^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n \frac{\partial}{\partial t} f(t)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n n f(t)^{n-1}\frac{\partial}{\partial t} f(t) =$$

$$= A\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}A^{n-1} f(t)^{n-1}\right)\frac{\partial}{\partial t} f(t) = A\exp\big(f(t)A\big)\frac{\partial}{\partial t} f(t).\#$$

Свойство 5. Если $A(t)$ есть матричная функция, каждый элемент которой дифференцируем по аргументу t, то

$$\frac{\partial}{\partial t}\exp(A(t)) = \frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A(t)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{v=0}^{n-1}A(t)^v\left(\frac{\partial}{\partial t}A(t)\right)A(t)^{n-v-1}. \tag{3.5}$$

4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Эта система имеет вид [Беллман Р. (1969), Понтрягин Л.С. (1965)]:

$$\dot{x}_j = \sum_{i=1}^{k} A_{j,i} x_i, \quad x_j(0) = c_j, \ j = 1,..., k; \ ,$$

или в векторно-матричном виде $\left(x = (x_1,..., x_k)^T, \right.$ $\left. A = \left(A_{j,i}\right)_{k \times k}, c = (c_1,..., c_k)^T \right)$

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = c. \qquad (4.1)$$

Теорема 1. Единственным решением системы (4.1) является

$$x(t) = \exp\left(tA\right)c. \qquad (4.2)$$

Доказательство. Согласно формуле (3.3)

$$\frac{\partial}{\partial t}\exp(tA) = A\exp(tA),$$

поэтому равенство (4.1) выполняется для (4.2):

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\exp\left(tA\right)c = A\exp\left(tA\right)c.$$

Докажем единственность. Пусть $y(t)$ – другое решение системы (4.1). Тогда разность $z(t) = y(t) - x(t)$ тоже удовлетворяет системе (4.1) с $c = 0$:

$$\dot{z} = Az, \quad z(0) = 0.$$

Из этого следует, что все производные функции $z(t)$ в точке 0 равны 0. Поэтому, разлагая в ряд Тейлора, находим, что тождественно $z(t) = 0$. #

В рассматриваемой постановке $x = (x_1, \dots, x_k)^T$ - это векторная функция, отвечающая первоначальному значению компонент $c = (c_1, \dots, c_k)^T$. Составим из векторов x матрицу X, в которой j–му столбцу будет соответствовать вектор x с начальным значением $c_j = 1$, а остальные c_i равны 0. Тогда получим матричную форму системы (4.1):

$$\dot{X} = AX, \quad X(0) = I, \qquad (4.3)$$

и решением будет

$$X(t) = \exp(tA). \qquad (4.4)$$

Теперь соотношение (2.6) позволяет записать решение системы дифференциальных уравнений (4.3) через собственные числа $\chi_1,...,\chi_k$ и вектора $\beta_1,...,\beta_k$ матрицы A. Из соотношения (2.2) следует, что для матрицы tA собственные вектора будут теми же, что и для A, а собственные числа $t\chi_1,...,t\chi_k$. Поэтому

$$X(t) = \exp(tA) = T diag\left(\exp\left(t\chi_1\right),..., \exp\left(t\chi_k\right)\right)T^{-1}. \qquad (4.5)$$

Иногда встречается несколько иная форма системы (4.3), а именно,

$$\dot{Z} = ZA, \quad Z(0) = I, \qquad (4.6)$$

К предыдущей форме можно перейти, полагая $A = A^T$.

5. КОНЕЧНАЯ ЦЕПЬ МАРКОВА С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Рассматриваемый случайный процесс $X(t)$, $t > 0$, имеет k состояний $1, 2, \ldots, k$ и матрицу переходных интенсивностей между состояниями $\lambda = \left(\lambda_{i,\,j}\right)_{k \times k}$ [Kijima M. (1997); Pacheco A., Tang L.C., Prabhu N.U. (2009); Ross Sh.M. (1970); Андронов А.М., Копытов Е.А., Гринглаз Л.Я. (2004)]. Напомним, что $\lambda_{i,\,j}\Delta$ есть вероятность того, что процесс, находящийся в состоянии i, перейдёт в состояние j за бесконечно малый интервал времени Δ. Мы хотим найти вероятность того, что в момент времени t процесс будет в состоянии j, если в начальный момент он был в состоянии i: $P_{i,\,j}(t) = P\left\{X(t) = j \middle| X(0) = i\right\}$.

Пусть Λ_i означает интенсивность выхода из состояния i: $\Lambda_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{i,j}$. Обычные рассуждения для малого интервала времени Δ приводят к следующей системе уравнений:

$$P_{i,j}(t+\Delta) = P_{i,j}(t)\left(1 - \Delta\Lambda_j\right) + \sum_{\nu=1}^{k} P_{i,\nu}(t)\lambda_{\nu,j}\Delta, \quad \forall i, j.$$

Стандартные вкладки приводят нас к системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{gathered} P_{i,j}(t+\Delta) - P_{i,j}(t) = -\Delta\Lambda_j P_{i,j}(t) + \sum_{\nu=1}^{k} P_{i,\nu}(t)\lambda_{\nu,j}\Delta, \\ \frac{1}{\Delta}\left(P_{i,j}(t+\Delta) - P_{i,j}(t)\right) = -\Lambda_j P_{i,j}(t) + \sum_{\nu=1}^{k} P_{i,\nu}(t)\lambda_{\nu,j}, \forall i, j, \end{gathered}.$$

$$\dot{P}_{i,j}(t) = -\Lambda_j P_{i,j}(t) + \sum_{\nu=1}^{k} P_{i,\nu}(t)\lambda_{\nu,j}, \quad \forall i, j. \tag{5.1}$$

Обозначая $P(t) = \left(P_{i,j}(t)\right)_{k\times k}$ и $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_k)^T$, запишем эту систему в матричной форме:

$$\dot{P}(t) = -P(t)diag\left(\Lambda\right) + P(t)\lambda,$$

$$\dot{P}(t) = P(t)\left(\lambda - diag(\Lambda)\right), \quad t \geq 0.$$

Эта система называется *прямой системой дифференциальных уравнений Колмогорова*. *Обратная система* получается, если рассматривать первый после начального момента скачок цепи Маркова:

$$P_{i,j}(t+\Delta) = (1-\Delta\Lambda_i)P_{i,j}(t) + \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_{i,\nu}\Delta P_{\nu,j}(t), \quad \forall i, j,$$

$$\frac{1}{\Delta}\left(P_{i,j}(t+\Delta) - P_{i,j}(t)\right) = -\Lambda_i P_{i,j}(t) + \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_{i,\nu} P_{\nu,j}(t), \forall i, j,$$

$$\dot{P}_{i,j}(t) = -\Lambda_i P_{i,j}(t) + \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_{i,\nu} P_{\nu,j}(t), \quad \forall i, j,$$

$$\dot{P}(t) = -diag\,(\Lambda) P(t) + \lambda P(t),$$

$$\dot{P}(t) = (\lambda - diag\,(\Lambda))P(t), \quad t \geq 0.$$

Окончательно:

$$\dot{P}(t) = P(t)(\lambda - diag\,(\Lambda)) = (\lambda - diag\,(\Lambda))P(t), \quad t \geq 0. \qquad (5.2)$$

Мы имеем ранее рассмотренную систему (4.3) с X(t) = P(t), $A = \lambda - diag(\Lambda)$. Матрица $A = \lambda - diag(\Lambda)$ называется *генератором* цепи Маркова. Если $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ есть собственные числа и вектора этой матрицы, а $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \ldots, \tilde{\beta}_k$ есть строки обратной матрицы A^{-1}, то согласно (4.5)

$$P(t) = \exp(tA) = \sum_{w=1}^{k} \beta_w \exp\left(t\chi_w\right)\tilde{\beta}_w, \; t \geq 0. \qquad (5.3)$$

Итак, эта формула позволяет вычислять нестационарные вероятности состояний $P_{i,j}(t) = P\{X(t) = j | X(0) = i\}$. Это позволяет найти $ET(t)_v$ - среднее время пребывания цепи в фиксированном состоянии v в течение интервала времени (0, *t*). Для этого можно использовать как численное интегрирование, так и аналитическую формулу:

$$ET(t)_v = \int_0^t P_{i,v}(u)du = \int_0^t \sum_{\eta=1}^k \mathrm{b}_{i,\eta} \exp(\gamma_\eta u) b^*_{\eta,v} du =$$

$$= tb_{i,1} b^*_{1,v} + \sum_{\eta=2}^k b_{i,\eta} \int_0^t \exp(\gamma_\eta u) du b^*_{\eta,v} =$$

$$= tb_{i,1} b^*_{1,v} + \sum_{\eta=2}^k b_{i,\eta} \frac{1}{\gamma_\eta} \left(\exp(\gamma_\eta t) - 1\right) b^*_{\eta,v}, \quad v = 1, \ldots, k. \qquad (5.4)$$

Говорят, что цепь Маркова имеет *стационарное распределение*, если имеют место следующие пределы, независящие от начальных состояний цепи:

$$\begin{gathered}\lim_{t\to\infty} P_{i,j}(t) = p_j, \\ \sum_j p_j = 1, \ \forall j \ p_j \ge 0. \end{gathered} \tag{5.5}$$

Оказывается, это возможно тогда и только тогда, когда среди собственных чисел матрицы $A = \lambda - diag(\Lambda)$ ровно одно равно нулю, а остальные числа – отрицательные. Пусть, для определённости, нулевым будет первое собственное число. Тогда согласно (5.3)

$$\begin{gathered}\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \beta_i \exp(t\chi_i)\tilde{\beta}_i = \beta_1\tilde{\beta}_1 + \\ + \lim_{t\to\infty} \sum_{i=2}^{k} \beta_i \exp(-t|\chi_i|)\tilde{\beta}_i = \beta_1\tilde{\beta}_1. \end{gathered} \tag{5.6}$$

Здесь β_1 есть собственный вектор, отвечающий нулевому собственному значению $\chi_1 = 0.$ Формула (2.2) показывает, что $A\,\beta_1 = 0.$

Сумма элементов каждой строки матрицы A равна нулю. Следовательно, элементы столбца β_1 должны равняться одной и той же постоянной c. Эта постоянная находится из условия нормировки для вероятностей. Итак, если η есть κ–мерный столбец из единиц, то

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \beta_1 \tilde{\beta}_1 = c\begin{pmatrix}\tilde{\beta}_1^{\,T} & \tilde{\beta}_1^{\,T} & \ldots & \tilde{\beta}_1^{\,T}\end{pmatrix}^T,$$

$$c = \left(\tilde{\beta}_1 \eta\right)^{-1}. \qquad (5.7)$$

Ниже приводится компьютерная иллюстрация рассмотренных вычислительных алгоритмов.

Markov chain. Nonstationary regime

Matrix of transition intensities λ

1. Initial data: Matrix of transition intensities λ

$$\lambda := \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

States number $k := \mathrm{rows}(\lambda)$ $k = 3$

$$ed(n) := \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad ed_i \leftarrow 1 \end{array}$$

$$ed(k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Lambda := \lambda \cdot ed(k) \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.5 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

2. Matrix analysis

$$A := \lambda^T - \mathrm{diag}(\Lambda)$$

$$A = \begin{pmatrix} -0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & -0.5 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 & -0.7 \end{pmatrix}$$

$$\chi := \mathrm{eigenvals}(A)$$

$$\chi^T = (0 \quad -0.521 \quad -0.979)$$

$$M := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..k-1 \\ \quad R^{\langle i \rangle} \leftarrow \mathrm{eigenvec}(A, \chi_i) \\ R \end{array} \right.$$

$$M = \begin{pmatrix} 0.757 & -0.774 & -0.162 \\ 0.494 & 0.612 & -0.612 \\ 0.428 & 0.162 & 0.774 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0.596 & 0.596 & 0.596 \\ -0.67 & 0.681 & 0.399 \\ -0.19 & -0.472 & 0.879 \end{pmatrix}$$

Control

$$A \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 0.403 & 0.158 \\ 0 & -0.319 & 0.6 \\ 0 & -0.084 & -0.758 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot \mathrm{diag}(\chi) = \begin{pmatrix} 0 & 0.403 & 0.158 \\ 0 & -0.319 & 0.6 \\ 0 & -0.084 & -0.758 \end{pmatrix}$$

3. Transition probabilities

3.1. Classical approach

$$\chi\exp(t) := \left| \begin{array}{l} \text{for } \; i \in 0..k-1 \\ \quad v_i \leftarrow \exp\left(\chi_i \cdot t\right) \\ v \end{array} \right.$$

$$\chi\exp(10) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5.469 \times 10^{-3} \\ 5.594 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$\Pr(t) := \left(M \cdot \mathrm{diag}(\chi\exp(t)) \cdot M^{-1}\right)^T$$

$$\Pr(10) = \begin{pmatrix} 0.454 & 0.292 & 0.254 \\ 0.448 & 0.296 & 0.255 \\ 0.449 & 0.295 & 0.255 \end{pmatrix}$$

3.2. Using matrix exponent

$$PrME(t,n) := \sum_{v=0}^{n} \left(\frac{1}{v!} \cdot t^{v} \cdot A^{v} \right)$$

$$PrME(10,32)^{T} = \begin{pmatrix} 0.454 & 0.292 & 0.254 \\ 0.448 & 0.296 & 0.255 \\ 0.449 & 0.295 & 0.255 \end{pmatrix}$$

$$PrME(10,4)^{T} = \begin{pmatrix} 17.125 & 24.375 & -40.5 \\ 12 & 83.875 & -94.875 \\ -42.375 & -138.75 & 182.125 \end{pmatrix}$$

$$PrME(10,20) = \begin{pmatrix} 0.719 & 1.108 & -0.781 \\ 1.297 & 2.797 & -4.369 \\ -1.016 & -2.905 & 6.15 \end{pmatrix}$$

$$PrME(10,26)^{T} = \begin{pmatrix} 0.455 & 0.296 & 0.249 \\ 0.451 & 0.308 & 0.241 \\ 0.444 & 0.275 & 0.281 \end{pmatrix}$$

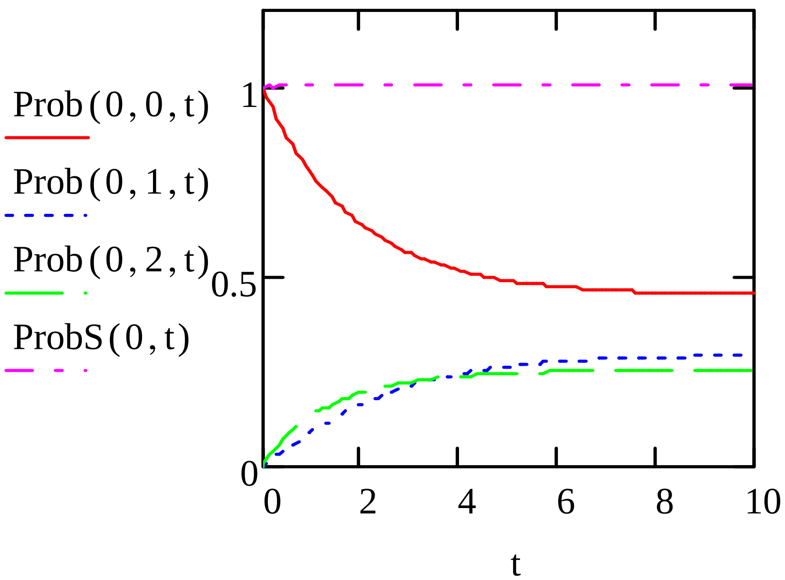
$$PrME(10,50)^{T} = \begin{pmatrix} 0.454 & 0.292 & 0.254 \\ 0.448 & 0.296 & 0.255 \\ 0.449 & 0.295 & 0.255 \end{pmatrix}$$

3.3 Graphical illustration

$$\mathrm{Prob}(i,j,t) := \left| \begin{array}{l} bf \leftarrow \left(M^{-1}\right)^{\langle i \rangle} \\ \chi f \leftarrow \chi \\ \nu f \leftarrow M \\ R \leftarrow \displaystyle\sum_{\varphi=0}^{k-1} \left(bf_{\varphi} \cdot \exp\left(\chi f_{\varphi} \cdot t\right) \cdot \nu f_{j,\varphi} \right) \\ R \end{array} \right.$$

$$\mathrm{ProbS}(i,t) := \sum_{m=0}^{k-1} \mathrm{Prob}(i,m,t)$$

$$t := 0, 0.1 .. 10$$



6. НЕПРЕРЫВНАЯ ПО ВРЕМЕНИ ЦЕПЬ МАРКОВА С ДОХОДАМИ

В дополнение к предыдущему здесь предполагается, что за каждую единицу времени пребывания цепи Маркова $X(t)$ в состоянии j начисляется доход β_j [Bladt M., Meini B., Neuts M.F., Sericola B. (2002); Sericola B. (2000)]. Эти доходы суммируются, так что общий доход за время t определяется как случайная величина

$$Y(t) = \int_0^t \beta_{X(t)} dt. \qquad (6.1)$$

Вывод распределения для этой случайной величины проводится стандартным способом. Пусть $Z_j(t)$ будет индикаторной функцией события $\{X(t) = j\}$, равной 1, если событие происходит и 0 – иначе. Определим преобразование Лапласа дохода $Y(t)$ и вероятности того, что состоянии цепи Маркова $X(t)$ есть j если начальное состояние i:

$$\Pi_{i,j}(w,t) = E\left(\exp\left(-wY(t)\right) \times Z_j(t) = j \middle| X(0) = i\right), \quad i, j = 1, \dots, k, \qquad (6.2)$$

Обычный вывод даёт для $i, j = 1,\ldots,n$:

$$\Pi_{i,j}(w,t+\Delta t) = \Pi_{i,j}(w,t)\left(1-\Lambda_j \Delta t\right)\exp(-w\beta_j \Delta t) +$$
$$+\sum_{\nu} \Pi_{i,\nu}(w,t)\lambda_{\nu,j} \exp(-w\beta_j \Delta t)\Delta t + o(\Delta t),$$
$$\Pi_{i,j}(w,t+\Delta t) = \Pi_{i,j}(w,t)\left(1-w\beta_j \Delta t + (\Delta t^2)\right) -$$
$$-\Pi_{i,j}(w,t)\Lambda_j \Delta t\left(1-w\beta_j \Delta t + (\Delta t^2)\right) +$$
$$+\sum_{\nu} \Pi_{i,\nu}(w,t)\lambda_{\nu,j}\left(1-w\beta_j \Delta t + (\Delta t^2)\right)\Delta t.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Pi_{i,j}(w,t) + w\beta_j \Pi_{i,j}(w,t) = -\Pi_{i,j}(y,t)\Lambda_i + \sum_{\nu}\Pi_{i,\nu}(y,t)\lambda_{\nu,j}, i,\ j = 1,\ldots,n.$$

Введём соответствующую $k \times k$-матрицу преобразований Лапласа:

$$\Pi(w,t) = \left(\Pi_{i,j}(w,t)\right)_{n\times n}.$$

Пусть $\mathrm{B} = diag(\beta_1, ..., \beta_n)$, $\Lambda = diag(\Lambda_1, ..., \Lambda_n)$ и напомним, что $\lambda = (\lambda_{i,j})$ и $\Lambda = diag(\Lambda_1, ..., \Lambda_n)$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}\Pi(w,t) + w\Pi(w,t)\mathrm{B} = -\Pi(w,t)\Lambda + \Pi(w,t)\lambda,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Pi(w,t) = \Pi(w,t)(\lambda - \Lambda - w\mathrm{B}). \quad (6.3)$$

Эта система дифференциальных уравнений аналогична системе (4.1). Согласно Теореме 1 её решение даётся матричной экспонентой

$$\Pi(w,t) = \exp(t(\lambda - \Lambda - w\mathrm{B})) = \sum_{\psi=0}^{\infty} \frac{1}{\psi!}(t(\lambda - \Lambda - w\mathrm{B}))^{\psi}. \quad (6.4)$$

Отметим, что при $w = 0$ (или $B = 0$) это даёт формулу (5.3).

Матрица средних значений дохода и соответствующих вероятностей состояний в момент времени t даётся формулой

$$E\left(\tilde{Y}(t)\right) = -\frac{\partial}{\partial w}\exp\left(t\left(\lambda - \Lambda - w\mathrm{B}\right)\right)\Big|_{w=0} = -\frac{\partial}{\partial w}\sum_{\psi=0}^{\infty}\frac{1}{\psi!}\left(t\left(\lambda - \Lambda - w\mathrm{B}\right)\right)^{\psi}\Big|_{w=0} =$$

$$= -\sum_{\psi=1}^{\infty}\frac{1}{\psi!}t^{\psi}\sum_{\mu=0}^{\psi-1}\left(\lambda - \Lambda - wR\right)^{\mu}\left(-\mathrm{B}\right)\left(\lambda - \Lambda - wB\right)^{\psi-1-\mu}\Big|_{w=0} = tB + \tag{6.5}$$

$$+\sum_{\psi=2}^{\infty}\frac{1}{\psi!}t^{\psi}\sum_{\mu=0}^{\psi-1}\left(\lambda - \Lambda\right)^{\mu}\mathrm{B}\left(\lambda - \Lambda\right)^{\psi-1-\mu}.$$

Теперь мы хотим получить выражение для момента любого порядка. Для этого представим выражение (6.4) в виде полинома по степеням w. Пусть $\alpha(\psi) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\psi)$ является булевым вектором размерности ψ, а $\Omega(\psi)$ - множество всех таких векторов $\left(|\Omega(\psi)| = 2^\psi\right)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\psi$, и для булева скаляра d и вектора α

$$z^d = \begin{cases} \lambda - \Lambda \;\; if \;\; d = 0, \\ -\mathrm{B} \;\; if \;\; d = 1, \end{cases} \quad z^\alpha = z^{\alpha_1} z^{\alpha_2} ... z^{\alpha_\psi} \quad .$$

Тогда $(\lambda - \Lambda - w\mathrm{B})^\psi = \sum\limits_{\alpha \in \Omega(\psi)} w^{|\alpha|} z^\alpha$.

Теперь мы хотим получить выражение для момента любого порядка. Для этого представим выражение (6.4) в виде полинома по степеням *w*. Пусть $\alpha(\psi) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\psi)$ является булевым вектором размерности ψ, а $\Omega(\psi)$ - множество всех таких векторов $\left(|\Omega(\psi)| = 2^\psi\right), |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\psi$, и для булева скаляра d и вектора α

$$z^d = \begin{cases} \lambda - \Lambda \ \ if \ \ d = 0, \\ -\mathrm{B} \ \ if \ \ d = 1, \end{cases} \quad z^\alpha = z^{\alpha_1} z^{\alpha_2} ... z^{\alpha_\psi} .$$

Тогда $(\lambda - \Lambda - w\mathrm{B})^\psi = \sum_{\alpha \in \Omega(\psi)} w^{|\alpha|} z^\alpha$.

Сгруппируем в последней сумме слагаемые с одинаковой степенью m переменной w. Пусть $M(m,\psi) = \sum_{\alpha\in\Omega(\psi):|\alpha|=m} z^{\alpha}$. Тогда

$$(\lambda - \Lambda - w\mathrm{B})^{\psi} = \sum_{\alpha\in\Omega(\psi)} w^{|\alpha|} z^{\alpha} = \sum_{m=0}^{\psi} w^{m} M(m,\psi). \qquad (6.6)$$

Теперь рассматриваемое преобразование Лапласа (6.4) можно представить в такой форме:

$$\Pi(w,t) = \exp(t(\lambda - \Lambda - wR)) = \sum_{\psi=0}^{\infty} \frac{1}{\psi!}(t(\lambda - \Lambda - wR))^{\psi} =$$

$$= I + \sum_{\psi=1}^{\infty} \frac{1}{\psi!} t^{\psi} (\lambda - \Lambda - wR)^{\psi} = I + \sum_{\psi=1}^{\infty} \frac{1}{\psi!} t^{\psi} \sum_{m=0}^{\psi} w^{m} M(m,\psi) =$$

$$= I + \sum_{\psi=1}^{\infty} \frac{1}{\psi!} t^{\psi} M(0,\psi) + \sum_{\psi=1}^{\infty} \frac{1}{\psi!} t^{\psi} \sum_{m=1}^{\psi} w^{m} M(m,\psi) =$$

$$= I + \sum_{\psi=1}^{\infty} \frac{1}{\psi!} t^{\psi} M(0,\psi) + \sum_{m=1}^{\infty} w^{m} \sum_{\psi=m}^{\infty} \frac{1}{\psi!} t^{\psi} M(m,\psi).$$

Окончательно

$$\Pi(w,t) = I + \sum_{\psi=1}^{\infty} \frac{1}{\psi!} t^{\psi} M(0,\psi) + \sum_{m=1}^{\infty} w^m \sum_{\psi=m}^{\infty} \frac{1}{\psi!} t^{\psi} M(m,\psi). \qquad (6.7)$$

Далее мы хотим найти моменты дохода за интервал времени (0, t). Напомним, что преобразование Лапласа формально определяется как

$$\Pi_{i,j}(w,t) = E\left(\exp(-wY(t)) \times Z_j(t) \middle| X(0) = i\right) =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} w^m \frac{1}{m!} E\left((-Y(t))^m \times Z_j(t) \middle| X(0) = i\right), \qquad (6.8)$$

где $Z_j(t)$ есть индикаторная функция события $\{X(t) = j\}$.

Сравнение формул (6.7) и (6.8) даёт

$$E\left((-Y(t))^m \times Z_j(t) \middle| X(0) = i\right) = m! \sum_{\psi=m}^{\infty} \frac{1}{\psi!} t^{\psi} M(m,\psi)_{i,j}. \qquad (6.9)$$

Окончательная матричная формула для m–го момента дохода и вероятностей состояний в момент времени t при различных начальных состояниях будет такой:

$$E\left(Y(t)^m \times diag\left(Z_1(t),..., Z_k(t)\right)\right) = m! \sum_{\psi=m}^{\infty} \frac{1}{\psi!} t^{\psi} M(m,\psi) . \quad (6.10)$$

Далее получаем формулу, обобщающую формулу (6.5) на произвольные m:

$$E\left((-Y(t))^m \middle| X(0) = i\right) = m! \sum_{j=1}^{n} \sum_{\psi=m}^{\infty} \frac{1}{\psi!} t^{\psi} M(m,\psi)_{i,j} =$$

$$= m! \sum_{\psi=m}^{\infty} \frac{1}{\psi!} t^{\psi} M(m,\psi)_{i,*} , \quad (6.11)$$

где $M(m,\psi)_{i,*}$ означает i-ую строку матрицы $M(m,\psi)_i$.

Функцию распределения дохода обычно получают путём обращения преобразования Лапласа [Abate J and Whitt W. (1992); Grawford F.W., Minin V.N., and Suchard M.A. (2014)]. Наличие моментов позволяет аппроксимировать распределение, не прибегая к нему [Andronov A.M., Rebezova M. I. (2013)]. Это иллюстрируется приведенными ниже графиками.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенный подход может быть применён для решения различных задач, например, оптимизационных. Предположим, имеется несколько управлений, которые определяют средние доходы r_j за единицу времени в состоянии j цепи Маркова. Эти управления можно выбирать в фиксированные моменты времени. Нужно найти оптимальную стратегию управления для конечного интервала времени.

Далее, аппроксимирующие вероятностные распределения дохода позволяют применять известные методы статистического оценивания неизвестных параметров нашей модели.

Occupation time for IC-T Markov Chain

1. Input data
Transition intensities λ
Duration t

$$\lambda := \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$n := \mathrm{rows}(\lambda)$$

$$n = 3$$

2. Auxiliary procedures

$$\mathrm{ed}(k) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..k-1 \\ \quad R_i \leftarrow 1 \\ R \end{array} \right.$$

$$\mathrm{ed}(4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda := \left| \begin{array}{l} V \leftarrow \lambda \cdot \mathrm{ed}(n) \\ R \leftarrow \mathrm{diag}(V) \\ R \end{array} \right.$$

$$\lambda\Lambda := \lambda - \Lambda$$

Eigevalues

$$\chi := \mathrm{eigenvals}(\lambda\Lambda)$$

$$\chi = \begin{pmatrix} -0.824 \\ 0 \\ -0.376 \end{pmatrix}$$

Eigenvectors

$$Z := \mathrm{eigenvecs}(\lambda\Lambda)$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0.646 & -0.577 & -0.361 \\ -0.735 & -0.577 & -0.838 \\ -0.207 & -0.577 & 0.41 \end{pmatrix}$$

$$ZI := Z^{-1}$$

$$\lambda\Lambda \cdot Z = \begin{pmatrix} -0.532 & 0 & 0.136 \\ 0.605 & 0 & 0.315 \\ 0.171 & 0 & -0.154 \end{pmatrix}$$

$$Z \cdot \mathrm{diag}(\chi) = \begin{pmatrix} -0.532 & 0 & 0.136 \\ 0.605 & 0 & 0.315 \\ 0.171 & 0 & -0.154 \end{pmatrix}$$

$$ZI = \begin{pmatrix} 0.848 & -0.524 & -0.324 \\ -0.559 & -0.223 & -0.95 \\ -0.359 & -0.58 & 0.939 \end{pmatrix}$$

3. Probabilities

$$P(t) := \left| \begin{array}{l} ZT \leftarrow Z \\ ZIT \leftarrow {Z^{-1}}^{T} \\ \chi T \leftarrow \chi \\ R \leftarrow \displaystyle\sum_{v=0}^{n-1} \left[\exp\left(t \cdot \chi T_{v}\right) \cdot \left(ZT^{\langle v \rangle} \cdot {ZIT^{\langle v \rangle}}^{T} \right) \right] \\ R \end{array} \right.$$

$$P(2) = \begin{pmatrix} 0.489 & 0.163 & 0.348 \\ 0.344 & 0.432 & 0.224 \\ 0.22 & 0.038 & 0.742 \end{pmatrix}$$

4. Occupation time

$$\mathrm{ETmar}(i0,\tau au) := \left|\begin{array}{l} \text{for } j \in 0..n-1 \\ \quad R_j \leftarrow \int_0^{\tau au} P(u)_{i0,j}\,du \\ R \end{array}\right.$$

$$\mathrm{ETmar}(1,2) = \begin{pmatrix} 0.457 \\ 1.318 \\ 0.225 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{ed}(3)\cdot\begin{pmatrix} 0.457 \\ 1.318 \\ 0.225 \end{pmatrix} = 2$$

$$\mathrm{ET}(\tau au) := \left|\begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad R^{\langle i \rangle} \leftarrow \mathrm{ETmar}(i,\tau au) \\ R^T \end{array}\right.$$

$$\mathrm{ET}(2) = \begin{pmatrix} 1.364 & 0.221 & 0.415 \\ 0.457 & 1.318 & 0.225 \\ 0.267 & 0.031 & 1.703 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{ET}(10) = \begin{pmatrix} 4.227 & 1.423 & 4.35 \\ 3.249 & 3.019 & 3.732 \\ 2.631 & 0.805 & 6.563 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1.364 & 0.221 & 0.415 \\ 0.457 & 1.318 & 0.225 \\ 0.267 & 0.031 & 1.703 \end{pmatrix}\cdot\mathrm{ed}(3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2.001 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4.227 & 1.423 & 4.35 \\ 3.249 & 3.019 & 3.732 \\ 2.631 & 0.805 & 6.563 \end{pmatrix}\cdot\mathrm{ed}(3) = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 9.999 \end{pmatrix}$$

5. Rewards

Rewards

$$\beta := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

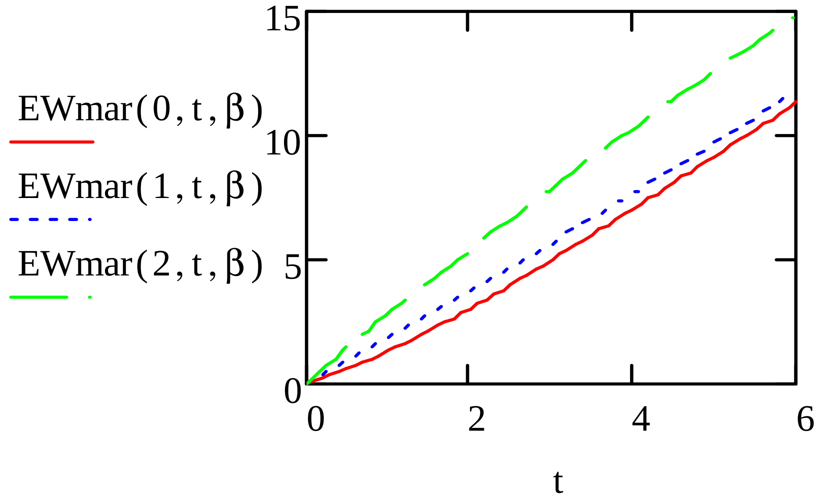
5.1 Expectation

$$EWmar(i0, t, \beta 0) := ETmar(i0, t)^T \cdot \beta 0$$

$$EWmar(0, 2, \beta) = 3.051 \qquad EWmar(1, 2, \beta) = 3.768$$

5.3 Graphical illustration

$$t := 0, 0.1 .. 6$$



Moments and approximation of cumulative distribution function (t = 5, i0 = 0)

$$\mu\alpha\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 9.169 & 92.284 & 1.003\cdot 10^{3} & 1.156\cdot 10^{4} & 1.395\cdot 10^{5} \end{pmatrix}^{T}$$

$$\mathrm{Appr}(5,15,0,0,\mu TSI) = \begin{pmatrix} -0.921 \\ 1.643 \\ -0.774 \\ 0.155 \\ -0.014 \\ 4.634\times 10^{-4} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Hmatrix}(5,15,6)^{-1}\cdot\mu TSI = \begin{pmatrix} -0.921 \\ 1.643 \\ -0.774 \\ 0.155 \\ -0.014 \\ 4.634\times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$e^{-0.5\cdot 5} = 0.082$$

$$z0 = \begin{pmatrix} -0.043 \\ 0.033 \\ -9.707\times 10^{-3} \\ 1.562\times 10^{-3} \\ -1.086\times 10^{-4} \\ 2.658\times 10^{-6} \end{pmatrix} \qquad zG := \begin{pmatrix} -1.325 \\ 2.071 \\ -0.943 \\ 0.186 \\ -0.017 \\ 5.46\times 10^{-4} \end{pmatrix} \qquad z00 := \begin{pmatrix} -0.921 \\ 1.643 \\ -0.774 \\ 0.155 \\ -0.014 \\ 4.634\times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$FD(x,b,c,d,p,\mu) := \left| \begin{array}{l} z \leftarrow Appr(b,c,d,p,\mu) \\ q \leftarrow rows(z) \\ \text{for } i \in 0..q-1 \\ \quad y_i \leftarrow (x-b)^{i+1} \\ R \leftarrow 0 \text{ if } x < b \\ R \leftarrow if(x<d,0,p) + (1-p)\cdot z^T \cdot y \text{ if } b < x < c \\ R \leftarrow 1 \text{ if } x \geq c \\ R \end{array} \right.$$

$$\mu TSI^T = \begin{pmatrix} 1 & 9.169 & 92.284 & 1.003\times 10^3 & 1.156\times 10^4 & 1.395\times 10^5 \end{pmatrix}$$

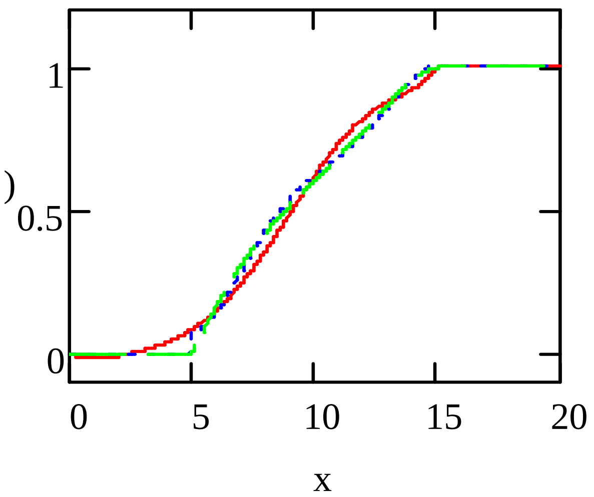
$$\mu TSI3^T = \begin{pmatrix} 1 & 9.169 & 92.284 & 1.003\times 10^3 & 1.156\times 10^4 \end{pmatrix}$$

$$x := 0, 0.01..20$$

FD(x, 0, 15, 0, 0, μTSI)

FD(x, 5, 15, 5, 0.082, μTSI3)

FD(x, 5, 15, 0, 0, μTSI3)



$$z0 = \begin{pmatrix} -0.043 \\ 0.033 \\ -9.707\times 10^{-3} \\ 1.562\times 10^{-3} \\ -1.086\times 10^{-4} \\ 2.658\times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Abate J and Whitt W. (1992). The Fourier-series method for inverting transform of probability distributions. Queueing Systems. 19, 5-88.
2. Andronov A.M., Rebezova M. I. (2013). Polynomial Approximation of the Activity Completion Time Distribution in Network Chart. *Automatic Control and Computer Sciences*, Volume 47, No. 4, pp. 192-201.
3. Bladt M., Meini B., Neuts M.F., Sericola B. (2002). Distributions of reward functions on continuous-time Markov chain. In: *4th International Conference on Matrix Analytic Methods. Theory and Applications*. Adelaide, Australia. 1 – 24.

4. Crawford F.W., Minin V.N., and Suchard M.A. (2014). Estimation for General Birth-Death Processes. *Journal of the American Statistical Association*. V.109, No 506, 730 – 747.
5. Kijima M. (1997). *Markov Processes for Stochastic Modeling*. London: Chapman & Hall.
6. Pacheco A., Tang L.C., Prabhu N.U. (2009). *Markov-Modulated Processes & Semiregenerative Phenomena*. New Jersey – London; World Scientific.
7. Ross Sh.M. (1970). *Applied Probability Models with Optimization Applications*. New York, Dower Publication, INC.

8. Sericola B. (2000). Occupation times in Markov processes. *Stochastic Models*. 16, 479-510.
9. Андронов А.М., Копытов Е.А., Гринглаз Л.Я. (2004). *Теория вероятностей и математическая статистика*. *Учебное пособие*. Москва – Санкт-Петербург: Питер.
10. Беллман Р. (1969). *Введение в теорию матриц*. Москва: Наука.
11. Понтрягин Л.С. (1965). *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. Москва: Наука.