



Session 3

Computing Mathematics

СИСТЕМА ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Эдмундас Завадскас, Леон Устинович

*Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса (ВГТУ)
Саулетякио аллея 11, Вильнюс ЛТ-2040, Литва
Тел. (+3705) 2745002. Факс. (+3705) 2700114.
E-mail: Edmundas.Zavadskas@adm.vtu.lt, leonasu@st.vtu.lt*

Рассматривается возможность применения односторонних и двухсторонних методов для решения широкого спектра экономических, технологических и управленческих задач с использованием системы поддержки принятия решений LEVI-3. В рамках односторонних задач рассматривается метод расстояния до идеальной точки (TOPSIS). Для двухсторонних задач сделано различие между играми с рациональной стратегией и играми против природы. Рассматривается применение следующих методов: обычного принципа минимакса, правила Wald, критерия Savage, правила Hurwicz, правила Laplace, правила Bayes и правила Hodges-Lehmann. В статье анализируются основные способы нормализации матрицы решения. Приводится описание программного пакета на примере решения инвестиционной задачи.

Ключевые слова: система поддержки принятия решений, рациональный вариант, теория игр, многокритериальная оценка

1. 1. Введение

При решении экономических, технологических и инвестиционных задач из рассматриваемого множества вариантов определяется рациональный вариант на основе оценки нескольких показателей эффективности, имеющих различные размерности. В настоящее время для решения такого типа задач в разных областях деятельности создаются системы поддержки принятия решений (СППР) [1–10].

В настоящее время используются компьютерные программы многокритериальной оценки: DELFI, ELECTRE III, ELECTRE IV, PREFCALC, MAPPAC, CARTESIA, PROMCALC и другие. В этих программах используются ELECTRE [2, 6], UTA [1, 7], MAPPAC [8, 9], CARTESIA [4], PROMETHEE [5, 10] методы.

При анализе известных СППР для многокритериальной оценки рассматриваемых вариантов выявлено следующее:

а) в большинстве случаев максимальные и минимальные значения показателей неизвестны, вследствие чего альтернативы оцениваются путём сравнения значений показателей с их наилучшими значениями. Таким образом нормализуется матрица принятия решений;

б) для оценки вариантов в различных СППР используются разные методы решения (как правило в отдельной СППР применяется один метод);

г) существует несколько методов нормализации матрицы принятия решений (одна СППР применяет один метод нормализации);

д) оцениваемые показатели эффективности в большинстве случаев имеют разные размерности;

е) в настоящее время не существует СППР, с помощью которой можно было бы решать задачи, оценивания альтернативы с учетом множества критериев, применяя разные методы решения и разные методы нормализации матрицы принятия решений;

з) в случае, когда в многокритериальной задаче имеются два направления оптимизации анализируемых показателей, максимизируемые и минимизируемые значения могут

изменяться в весьма различных интервалах. Вследствие этого методы нормализации довольно часто могут оказать существенное влияние на результат расчёта.

Если неизвестны весомеры показателей эффективности, решаемую задачу можно рассматривать как решение в условиях неопределенности. Для принятия решений в условиях неопределенности нами применяются методы теории игр.

В Вильнюсском техническом университете им. Гедиминаса [11–14] и Лейпцигском университете прикладных наук [11, 15, 16] исследуется применение методов теории игр к решению различных прикладных задач. Разработана система поддержки принятия решений (СППР) [17] для выбора рациональных альтернатив (LEVI-3.0).

2. Структура и методология системы поддержки принятия решений LEVI-3.0

В СППР LEVI-3.0 выделены односторонние и двухсторонние методы решения задач стратегической игры. Односторонние задачи игры могут быть решены известными методами выбора вариантов и определения порядка приоритета. По теории игр решение двухсторонней стратегической игры – это определение равновесия рациональной стратегии игры двух сторон, имеющих противоположные интересы, или установление равновесия в игре против природы.

СППР LEVI-3.0 может быть применена для решения широкого спектра экономических, технологических и управленческих задач.

Одним из важнейших достижений разработанной СППР является нечеткая связь между способами нормализации матрицы принятия решений и методами решения. Они относительно независимы.

Матрица принятия решений нормализуется векторным, линейным, нелинейным (метод Ф. Пелдшуса [15]) методами. Она представлена матрицей, которая содержит варианты (строки) и показатели эффективности (столбцы). Варианты представляют набор альтернатив решаемой задачи. Все рассматриваемые варианты оцениваются, используя принятые к рассмотрению показатели. Результаты оценки помещены в матрицу a_{ij} ; $i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, n$.

Векторная нормализация в основном применяется для метода расстояния до идеальной точки (TOPSIS) [18], но может быть использована и для других методов [19]. Значения этого преобразования определяются по выражению (1) и находятся в интервале $[0; 1]$:

$$b_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m a_{ij}^2}}. \quad (1)$$

Линейная нормализация используя шкалу существующих значений показателей [20], преобразует исходные значения a_{ij} в нормализованные значения b_{ij} . Расчетные значения зависят от интервала $[a_{io}; a_{iu}]$ и изменяются в случае изменения величины интервала.

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} - a_{iu}}{a_{io} - a_{iu}}, \text{ если } b_{ij} \text{ максимизируются, } 0 \leq b_{ij} \leq 1, \quad (2)$$

$$b_{ij} = \frac{a_{io} - a_{ij}}{a_{io} - a_{iu}}, \text{ если } b_{ij} \text{ минимизируются, } 0 \leq b_{ij} \leq 1.$$

где a_{io} – максимальное значение нормализуемого показателя, a_{iu} – минимальное значение нормализуемого показателя.

Линейное преобразование хорошо определяет относительные отклонения. Значение этого преобразования ограничено интервалом [0; 1].

Körth [21] предложил следующую формулу для осуществления линейного преобразования:

$$b_{ij} = 1 - \left| \frac{a_j^* - a_{ij}}{a_j^*} \right|, \quad (3)$$

где a_j^* – оптимальное значение анализируемого показателя эффективности.

Для осуществления линейной нормализации возможно использования метода Jüttler [22]:

$$b_{ij} = \frac{|a_j^* - a_{ij}|}{a_j^*}, \quad (4)$$

или метода Stopp [23]:

$$b_{ij} = \begin{cases} \frac{100a_{ij}}{\max_i a_{ij}}, & \text{если предпочтителен } \max_i a_{ij} \\ \frac{100 \min_i a_{ij}}{a_{ij}}, & \text{если предпочтителен } \min_i a_{ij} \end{cases} \quad (5)$$

При применении теории игр для решения технологических, экономических, организационных задач, безразмерные величины должны удовлетворять следующим требованиям:

- они должны отображать отношение к оптимальной (в пределах данных, включенных в оценку) величине показателя;
- они должны быть независимыми от формы матрицы;
- одинаковые процентные изменения значений должны сохраняться как для максимизируемых так и для минимизируемых показателей;
- оптимальные значения показателей могут находиться в любом месте матрицы принятия решения.

Чтобы удовлетворять вышеупомянутым требованиям, предлагаются нижеприведенные формулы.

При использовании **нелинейного преобразования** (метод Ф. Пелдшуса [15]) результаты не зависят от величины интервала:

$$b_{ij} = \left(\frac{\min_i a_{ij}}{a_{ij}} \right)^3, \quad \text{если желательным является } \min_i a_{ij}, \quad (6)$$

$$b_{ij} = \left(\frac{a_{ij}}{\max_i a_{ij}} \right)^2, \quad \text{если желательным является } \max_i a_{ij}. \quad (10)$$

Задачи решаются с применением следующих методов: обычного принципа минимакса, правила Wald, критерия Savage, правила Hurwicz, правила Laplace, правила Bayes и правила Hodges-Lehmann.

Для односторонних проблем рассматривается только метод расстояния до идеальной точки (TOPSIS) [18]. Решение состоит из следующих этапов.

Использование рассматриваемого метода подразумевает упорядочение вариантов согласно величине отклонения от идеального варианта. Матрица принятия решения нормализуется с использованием выражения (1). Из наилучших показателей формируется идеальный вариант – a^+ , из наихудших показателей формируется негативный вариант – a^- :

$$a^+ = \left\{ \left[\left(\max_i b_{ij} / j \in J \right), \left(\min_i b_{ij} / j \in J' \right) \right] / i = \overline{1, m} \right\} = \{ f_1^+, f_2^+, \dots, f_n^+ \}, \quad (7)$$

$$a^- = \left\{ \left[\left(\min_i b_{ij} / j \in J \right), \left(\max_i b_{ij} / j \in J' \right) \right] / i = \overline{1, m} \right\} = \{ f_1^-, f_2^-, \dots, f_n^- \}, \quad (8)$$

где J – множество максимизируемых показателей, и J' является множеством минимизируемых показателей.

После определения расстояний от рассматриваемых вариантов до идеального и негативного вариантов – L^+ and L^- ,

$$L_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^n (b_{ij} - f_j^+)^2} ; i = 1, 2, \dots, m, \quad (9)$$

$$L_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (b_{ij} - f_j^-)^2} ; i = 1, 2, \dots, m. \quad (10)$$

рассчитывается относительная близость к идеальному варианту:

$$K_i = \frac{L_i^-}{L_i^+ + L_i^-} , i = 1, 2, \dots, m. \quad (11)$$

Расчетные значения K_i находятся в интервале [0; 1] и их можно упорядочить в убывающей последовательности, которая является показателем рациональности анализируемых вариантов.

Двусторонние задачи. Для двусторонних задач сделано различие между играми с рациональной стратегией и играми против природы. Матричные игры можно характеризовать как игры двух человек с конечной нулевой суммой. Их можно вывести на основании игры из n участников. Согласно Burger [24] игра n участников стандартной формы определяется как количество n непустых множеств S_i ($i=1, \dots, n$) стратегий n -го игрока и функций A_i ($i=1, \dots, n$) выигрыша n -го игрока, определенный на множестве $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$.

Произведение множеств $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ является множеством наборов (s_1, \dots, s_n) где $s_1 \in S_1, \dots, s_n \in S_n$. Эта игра обозначается как $\Gamma = \{S_1, \dots, S_n; A_1, \dots, A_n\}$. Множество стратегий S_i могут являться множеством точек евклидова пространства.

Игры с рациональной стратегией. Решения задач с рациональной стратегией сводятся в идеальном случае к определению седловой точки (простой принцип минимакса) или к комбинации стратегий (расширенный принцип минимакса) [25].

Простой принцип минимакса.

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} \quad (12)$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} \quad (13)$$

Если $\alpha = \beta = \nu$, то это решение с ясными стратегиями – седловая точка определена (существует только одна оптимальная стратегия для каждого игрока).

Расширенный принцип минимакса. Вычисление точки равновесия смешанных стратегий (согласование стратегий)

$$\max_i \min_j A(s_1, s_2) = \min_i \max_j A(s_1, s_2) = A(s_1^*, s_2^*) = \nu. \quad (14)$$

Игра против природы. Правило Wald. Этот метод ищет лучшее из худших решений [26]. Лицо, принимающее решение действует согласно пессимистическому прогнозу.

$$S_1^* = \left\{ S_{1i} / S_{1i} \in S_1 \cap \max_i \min_j a_{ij} \right\}. \quad (15)$$

Правило Savage. Цель – минимизировать потери, которая является разностью между самой большой и достигнутой выгодой [27].

$$S_1^* = \left\{ S_{1i} / S_{1i} \in S_1 \cap \min_i \max_j c_{ij} \cap c_{ij} = \left(\max_r a_{rs} \right) - a_{rs} \right\}, \quad (16)$$

где $r=1, 2, \dots, m; s=1, 2, \dots, n$.

Недостаток метода: неоптимальные стратегии влияют на принимаемое решение.

Правило Hurwicz. Оптимальная стратегия определяется на основании наилучшего и самого плохого результата [28]. Минимальные и максимальные значения элементов строк сводятся к средневзвешенному оптимистическому значению параметра λ . На основании этого параметра устанавливается стратегия:

$$S_1^* = \left\{ S_{1i} / S_{1i} \in S_1 \cap \max_i h_i \cap h_i = \min_i a_{ij} + (1-\lambda) \max_j a_{ij} \cap 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}. \quad (17)$$

При значении $\lambda=1$ находится самое пессимистическое решение (правило Wald). Для значения $\lambda=0$ рассматриваются только максимальные значения, обуславливая самый большой риск.

Правило Bernoulli-Laplace. Правило Бернулли [29] применяется при условии, что вероятности различных стратегий оппонентов равны:

$$S_1^* = \left\{ S_{1i} / S_{1i} \in S_1 \cap \max_i \left(1/n \sum_{i=1}^n a_{ij} \right) \right\}. \quad (18)$$

Правило Bayes. В случае, если известны вероятности стратегий оппонентов, используется максимальное ожидаемое значение [30].

$$S_1^* = \left\{ S_{1i} / S_{1i} \cap \max_i \left(\sum_{j=1}^n q_j a_{ij} \right) \cap \sum_{j=1}^n q_j = 1 \right\}. \quad (19)$$

Правило Hodges-Lehmann. При использовании данного правила [31] вероятность стратегий оппонента может быть выражена параметром λ :

$$S_1^* = \left\{ S_{1i} / S_{1i} \in S_1 \cap \max_i \left[\lambda \sum_{j=1}^n q_j a_{ij} + (1 - \lambda) \min_j a_{ij} \right] \cap 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}, (20)$$

где $\lambda = 0$ (вероятность стратегий оппонента очень мала), $\lambda = 1$ (большая вероятность стратегий оппонента).

Компьютерная программа СППР LEVI-3.0 работает в операционных системах Windows 98, Millennium или более высоких. Можно использовать показатели эффективности, имеющие различные размерности и большое количество альтернативных вариантов (число в программе ограничено – не более 50).

В программу включена функция помощи – «help». В функции «help» предоставлена информация о применяемых методах и способах нормализации матрицы принятия решений. Все существенные функции (*Save, Open, Significance factors, Solution methods, ...*) в программе могут управляться верхним меню или «горячими» кнопками. Во всех полях можно вызвать режим помощи- «help», нажав кнопку «F1» или «?». Данная программа может быть приспособлена к работе на Английском или Немецком языках. На рис. 1 показано предназначение информационных полей программы.

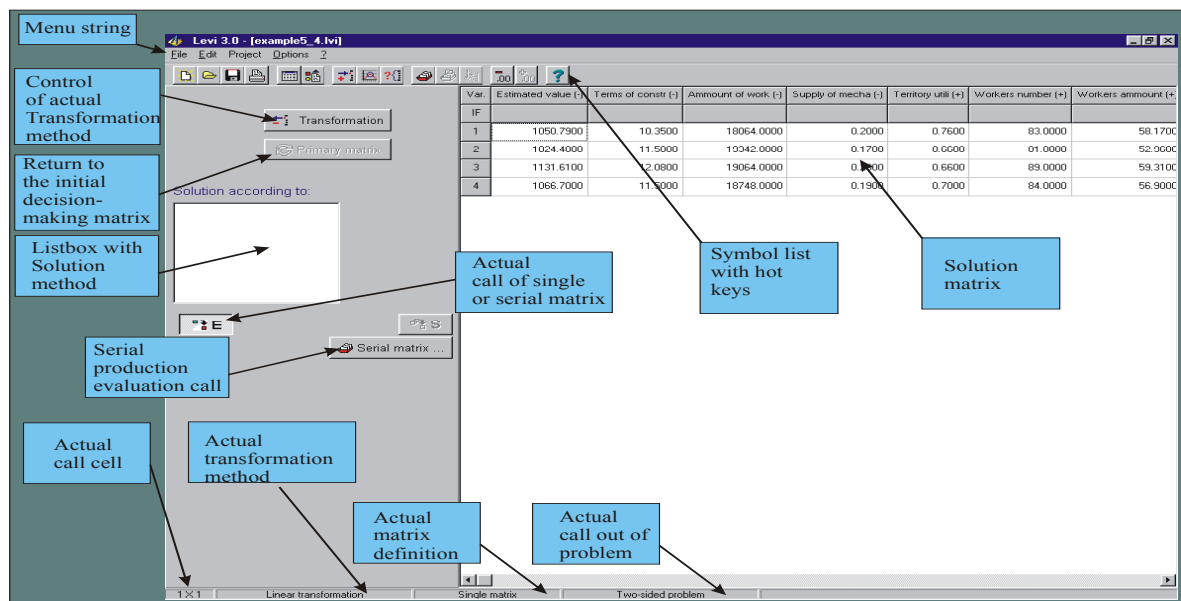


Рис. 1. Предназначение информационных полей СППР LEVI-3

3. Пример применения СППР LEVI-3.0

Для иллюстрации описанных методов рассматривается задача инвестиций в строительстве. Была проанализирована задача определения эффективности финансовых инвестиций в реконструкцию или новое строительство в городе Неринга (Литва). Количество инвестиционных вариантов ограничено в соответствии с требованиями заповедной области и сохранения архитектурных памятников. Вследствие этого, фактически рассматривались три инвестиционных варианта. Существует возможность строительства жилого здания или гостиницы в центре города или жилого здания на побережье. Определенные требования по архитектуре в центре города увеличивают

стоимость строительства. С другой стороны, стоимость реализации законченного проекта выше по сравнению с другими городскими областями. Вариант гостиницы включает частичную эксплуатацию и дальнейшую продажу. Эффективность варианта была оценена следующими показателями эффективности: продолжительность реализации проекта, стоимость осуществления проекта (стоимости проектирования, строительные работы, сопутствующие работы), цена реализации (продажи) проекта, вероятная прибыль. Банковские процентные ставки были приняты во внимание при вычислении количества прибыли. В табл. 1 помещены основные показатели эффективности оцениваемых проектов.

Таблица 1. Основные показатели эффективности оцениваемых проектов

	Продолжительность реализации проекта (года) k_1	Стоимость осуществления проекта (LTL) k_2	Цена реализации (продажи) проекта (LTL) k_3	Вероятная прибыль (LTL) k_4
Жилое здание в центре города	1,5	4335000	7200000	2415000
Гостиница в центре города	8,5	5200000	6500000	4200000
Жилое здание на побережье	1,3	3400000	4800000	1780000
	min	min	max	max

При формировании матрицы принятия решения рассматривались ниже представленные показатели.

$$r_1 = k_1,$$

$$r_2 = k_3 / k_2,$$

где, k_1 – продолжительность реализации проекта, k_2 – стоимость осуществления проекта, k_3 – цена реализации (продажи) проекта.

В матрице принятия решения рассматривается интегрированный показатель (r_3), выраженный как отношение показателя вероятной прибыли (k_4) к стоимости осуществления проекта (k_2):

$$r_3 = k_4 / k_2.$$

После вышеупомянутых замен получена матрица принятия решения (табл. 2).

Первый показатель должен быть минимизирован. Вторым и третьим показателями максимизируются. Лучшие значения трех рассматриваемых показателей эффективности в матрице принятия решения находятся в различных вариантах. Первый показатель принимает минимальное значение в варианте 3, второй показатель оптимален для первого варианта, третий показатель оптимален для второго варианта (рис. 2).

Таблица 2. Матрица принятия решения

Варианты \ Показатели	r_1	r_2	r_3
v_1	1.500	1.661	0.557
v_2	8.500	1.250	0.808
v_3	1.300	1.411	0.524
	min	max	max

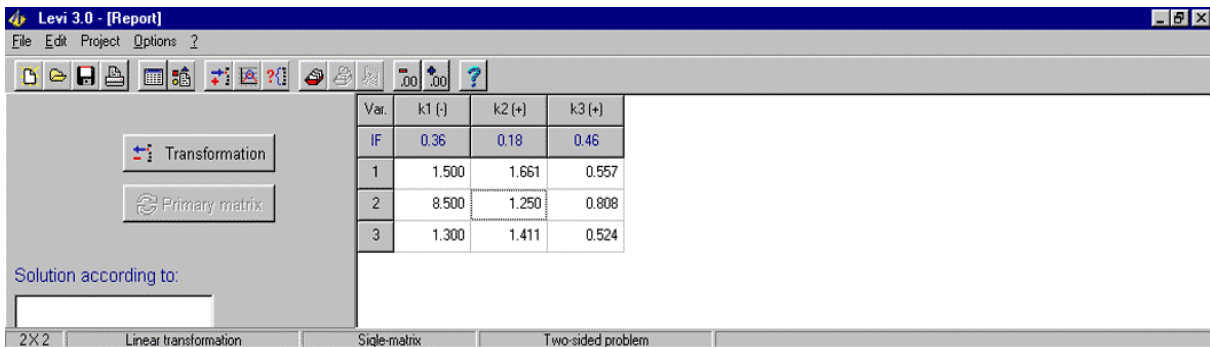


Рис. 2. Пример ввода исходных данных

При решении выше представленной задачи использовались различные методы нормализации начальной матрицы принятия решения (Рис. 3):

- векторная нормализация;
- линейная нормализация;
- нелинейная нормализация.

Применены различные методы принятия решения:

- расстояния к идеальной точке (TOPSIS);
- обычного принципа минимакса;
- правила Wald;
- критерия Savage;
- правила Hurwicz;
- правила Laplace;
- правила Bayes;
- правила Hodges-Lehmann.

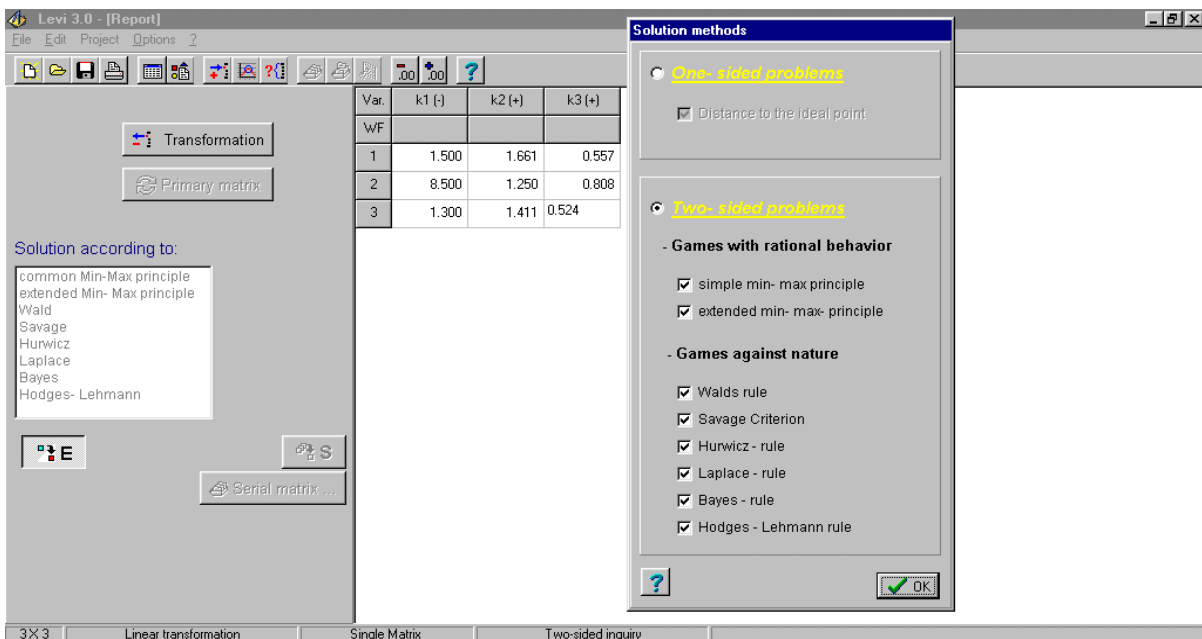


Рис. 3. Ввод методов принятия решения

Задача решена, не учитывая значимостей (весомостей) показателей эффективности. При применении метода расстояния к идеальной точке (TOPSIS) упомянутые значимости (*IF*) были учтены при помощи экспертного метода парного сравнения. Ввод исходных данных показан на рис. 2. Результаты решения СПИР LEVI-3.0 приведены на рис. 4–5. В табл. 3 помещено сравнение полученных результатов.

В зависимости от принятого прогноза на основании табл. 3 можно определить вектор приоритетов анализируемых вариантов. Трудно однозначно определить влияние различных методов нормализации на окончательный результат рациональности анализируемых вариантов. Однако установлено, что нелинейная нормализация (метод Ф. Пелдшуса) улучшает качество нормализации и дает более точные решения при анализе технологических, организационных, инвестиционных и других рассматриваемых задач.

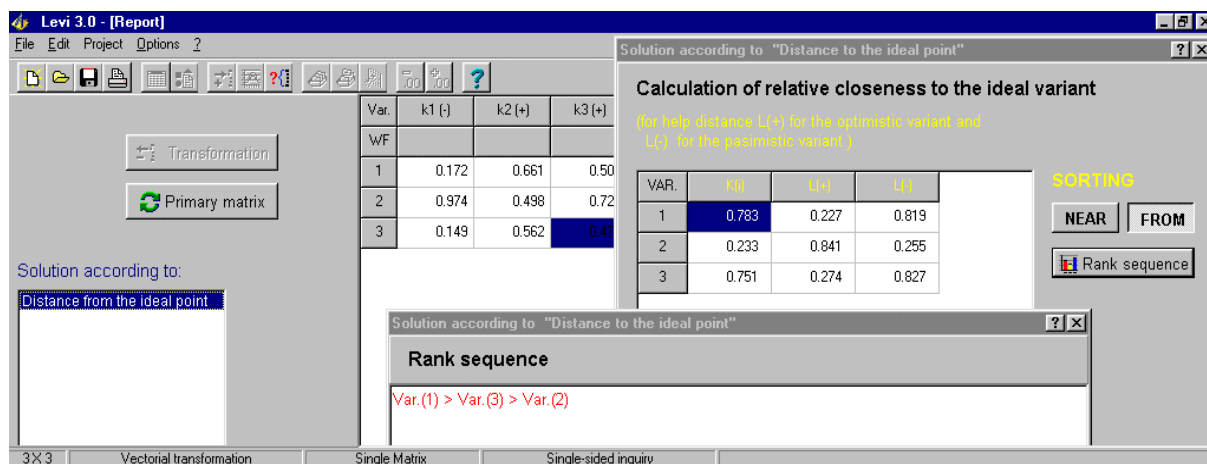


Рис. 4. Результаты расчета при использовании одностороннего метода решения задачи (TOPSIS)

Таблица 3. Сравнение полученных результатов

Метод решения	Способ нормализации матрицы решения			
	Не нормализована	Векторный	Линейный	Нелинейный
Значимости показателей не учтены				
Расстояния до идеальной точки (TOPSIS)	1 > 3 > 2	1 > 3 > 2	2 > 1 > 3	2 > 1 > 3
Простой принцип минимакса	2	**	*	*
Wald	2 > 1 > 3	2 > 1 > 3	1 > 2 > 3	1 > 3 > 2
Savage	2 > 1 > 3	2 > 1 > 3	1 > 2 > 3	1 > 3 > 2
Hurwicz RF 0	2 > 1 > 3	2 > 1 > 3	1 > 2 > 3	1 > 2 > 3
Hurwicz RF 0,5	2 > 1 > 3	2 > 1 > 3	1 > 2 > 3	1 > 3 > 2
Hurwicz RF 1	2 > 1 > 3	1 > 2 > 3	1 > 2 > 3	1 > 3 > 2
Laplace	2 > 1 > 3	2 > 1 > 3	1 > 3 > 2	3 > 1 > 2
Значимости показателей учтены				
Расстояния до идеальной точки (TOPSIS)	3 > 1 > 2	3 > 1 > 2	3 > 2 > 1	3 > 1 > 2

** – седловой точки решения не существует; * – седловой точки решения не существует, многозначное решение.

Levi 3.0 - [Report]

File Edit Project Options ?

Transformation Primary matrix

Var.	k1 (-)	k2 (+)	k3 (+)
WF			
1	0.172	0.661	0.501
2	0.974	0.498	0.726
3	0.149	0.562	0.471

Solution according to:

- common Min-Max principle
- extended Min- Max principle
- Wald
- Savage
- Hurwicz
- Laplace
- Bayes
- Hodges- Lehmann

Serial matr

Solution according to simple Min - Max - principle

No saddle point solution: α : 0.498 β : 0.661

VAR.	k1	k2	k3	ALPHA
1	0.172	0.661	0.501	0.172
2	0.974	0.498	0.726	0.498
3	0.149	0.562	0.471	0.149
BETTA	0.974	0.661	0.726	

3X3 Vectorial transformation Single Matrix Twosided inquiry

Levi 3.0 - [Report]

File Edit Project Options ?

Transformation Primary matrix

Var.	k1 (-)	k2 (+)	k3 (+)
IF			
1	0.972	1.000	0.116
2	0.000	0.000	1.000
3	1.000	0.392	0.000

Solution according to:

- Wald
- Savage
- Hurwicz
- Laplace
- Bayes
- Hodges- Lehmann

Solution according to Wald

Favourable variant according to Wald: 1 (Clear solution)

VAR.	k1	k2	k3	Result
1	1.500	1.661	0.557	0.120
2	8.500	1.250	0.808	0.000
3	1.300	1.411	0.524	0.000

Solution according to Savage

Favour variant according to Savage: 1 (Non equisocial solution)

VAR.	k1	k2	k3	Result
1	1.500	1.661	0.557	0.880
2	8.500	1.250	0.808	1.000
3	1.300	1.411	0.524	1.000

Solution according to Hurwicz

Favourable variant according to Hurwicz

RF:	0.000 (Var.)	0.500 (Var.)	1.000 (Var.)
	1.000 (1)	0.558 (1)	0.116 (1)
	1.000 (2)	0.500 (2)	0.000 (2)
	1.000 (3)	0.500 (3)	0.000 (3)

Solution according to Laplace

Favourable variant according to Laplace: 1 (Eindeutige Lösung)

VAR.	k1	k2	k3	Result
1	1.500	1.661	0.557	0.696
3	1.300	1.411	0.524	0.464
2	8.500	1.250	0.808	0.333

Solution according to Bayes

Favourable variant according to Bayes: 1 (Twoat solution)

VAR.	k1	k2	k3	Result
q	0.360	0.180	0.460	
1	1.500	1.661	0.557	0.583
2	8.500	1.250	0.808	0.460
3	1.300	1.411	0.524	0.431

Favourable variant according to Hodges- Lehmann: 1 ($\lambda = 0.5$)

VAR.	k1	k2	k3	Result
q	0.360	0.180	0.460	
$\lambda = 0.500$				
1	1.500	1.661	0.557	0.379

Back

Рис. 5. Результаты расчета при использовании двухсторонних методов решения задачи

4. Выводы

1. В результате детального анализа известных программ и методов многокритериальной оценки альтернатив, а также способов нормализации матрицы принятия решений установлен ряд их недостатков. Для преодоления этих недостатков разработана программа LEVI-3.0.

2. Программа LEVI-3.0 разработана для многокритериальной оценки рациональности альтернатив.

3. Задачи решаются с использованием разных методов оценки и разных способов нормализации матрицы принятия решений.

4. СППР LEVI-3.0 может быть с успехом применена для оценки инвестиций и других альтернативных решений в области строительства.

5. В СППР метод решения задачи не связан строго с применяемым способом нормализации матрицы принятия решений.

6. СППР LEVI-3.0 имеет не только практическое, но и научное значение, так как предоставляет возможность исследовать результаты решения задач различными методами и сопоставлять результаты.

7. Метод Ф. Пелдшуса для нормализации матрицы принятия решений улучшает качество нормализации и способствует более точному решению.

8. Отдельные модули СППР LEVI-3.0 целесообразно применять при создании других систем принятия решений.

9. Применение СППР LEVI-3.0 оправдано при выборе места для строительства коммерческих объектов.

Литература

1. Jacquet-Lagrange E. (1990). Interactive assessment of preferences using holistic judgments: the PREFCALC system. In: Multiple Criteria Decision Aid, Bana e Costa C (ed.), Berlin: Springer-Verlag, 335–350.
2. Valee D., Zielniewicz P. (1994). ELECTRE III and IV 3.x. Aspects methodologiques, Paris : LAMSADE, Document No 85, 156 p.
3. Matarazzo B. (1990). A Pairwise Criterion Comparison Approach: The MAPPAC and PRAGMA methods. In: Multiple Criteria Decision Aid, Bana e Costa C. (ed.), Berlin: Springer-Verlag, 253–273.
4. Giarlotta A. (1991). Multicriteria Compensability Analysis Ranking Totally the Alternatives based on the Employment of a Non-symmetric Information Axiom (CARTESIA), *Annali dell Facolta di Economia e Commercio*, No 37, 1–33.
5. Brans J. P., Mareschal B., Vincke Ph. (1984). PROMETHEE – A new family outranking methods in multicriteria analysis. *Operations Research*, North-Holland, 477–490.
6. Roy B. (1996). Multicriteria Methodology for Decision Aiding. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 293 p.
7. Jacquet-Lagrange E. (1984). PREFCALC: evaluation et decision multicritere. *Revue de l'Utilisateur de l'IBM PC*, No 3, 38-55.
8. Matarazzo B. (1986). Multicriterion analysis of preferences by means of pairwise actions and criterion comparisons (MAPPAC). *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 18, No.2, 119-141.
9. Matarazzo B. (1990). A Pairwise Criterion Comparison Approach: The MAPPAC and PRAGMA methods. In: Readings in Multiple Criteria Decision Aid, Bana e Costa C. (ed.), Springer-Verlag, Berlin, 253-273.
10. Brans J. P., Ph.Vincke, B. Mareschal. (1986). How to select and how to rank projects: The PROMETHEE method. *European Journal of Operational Research*, Vol. 24, 228-238.

11. Peldschus F., Zavadskas E. K. (1997). Матричные игры в технологии и организации строительства. Vilnius: Technika, 134 p. (на литовском языке).
12. E. K. Zavadskas, F. Peldschus, L. Ustinovichius. (2003). Development of software for multiple criteria evaluation. *Informatica*, Vol. 14, No.2, 259-272.
13. Завадскас Э. К., Пелдшус Ф. (1986). Применение теории игр при подготовке строительного производства. Вильнюс.
14. Завадскас Э. К., Устиновичюс Л. (2001). Методика анализа инвестиционных проектов реконструкции зданий с помощью комплекса методов многоцелевой селектоновации. *Ūkio technologinis ir ekonominis vystymas*, VII t., No. 1. Vilnius, Technika, 30–39.
15. Peldschus F. (1986). Zur Anwendung der Theorie der Spiele für Aufgaben der Bautechnologie. Dissertation B. TH Leipzig, 119 s.
16. Peldschus F. (2001). Sensibilitätsuntersuchungen zu Methoden der merhkriteriellen Entscheidungen. *Statyba* (Journal of Civil Engineering and Management), Vol. 7, No. 4, Vilnius: Technika, 276–281.
17. Zavadskas E. K., Ustinovičius L., Turskis Z., Peldschus F., Messing D. (2002). Levi 3.0 – Multiple criteria evaluation program for construction solutions. *Journal of Civil Engineering and Management*, Vol. 7, No 3, Vilnius: Technika, 184–191.
18. Hwang C. L., Yoon K. (1981). TOPSIS (Technique for order preference by similarity to ideal solution) – A multiple attribute decision making. In: Multiple attribute decision making – Methods and applications, A state-of-the-art survey, Springer Verlag, Berlin, 128–140.
19. Zavadskas E., Peldschus F., Kaklauskas A. (1994). Multiple Criteria Evaluation of Projects in Construction. Vilnius: Technika.
20. Weitendorf D. (1976). Beitrag zur Optimierung der räumlichen Struktur eines Gebäudes. Dissertation A, Hochschule für Architektur und Bauwesen. Weimar.
21. Körth H. (1969). Zur Berücksichtigung mehrerer Zielfunktionen bei der Optimierung von Produktionsplänen. *Mathematik und Wirtschaft*, Band 6, Berlin: Verlag der Wirtschaft, 184-201.
22. Jüttler H. (1966). Untersuchungen zur Fragen der Operationsforschung und ihrer Anwendungsmöglichkeiten auf ökonomische Problemstellungen unter besonderer Berücksichtigung der Spieltheorie. Dissertation A an der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Humboldt-Universität Berlin.
23. Stopp F. (1975). Variantenvergleich durch Matrixspiele. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Bauwesen Leipzig*, Heft 2.
24. Burger E. (1963). Introduction to the theory of games. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 202 p.
25. Manteufel K., Stumpe D. (1977). Spieltheorie. *Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte*, Band 21/1. Leipzig: G.Teubner Verlagsgesellschaft.
26. Wald A. (1945). Statistical decisions functions which minimize the maximum risk. *Annals of Mathematics*, 265-280.
27. Savage L. J. (1951). The Theory of Statistical Decision. *Journal of the American Statistical Association*, 55-57.
28. Hurwicz L. (1951). Optimality Criteria for Decision-Making under Ignorance. Cowles Commission Paper, Statistics, No 370.
29. Bernouli D. (1738). Specimen theoriae novae de mesure sortis. *Comentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 175-192.
30. Arrow K. J. (1949). Bayes and Minimax Solutions of Sequential Decision Problems. *Econometrica*, 213-243.
31. Hodges Jr. L., Lehmann E. L. (1952). The Use of Previous Experience in Reaching Statistical Decision. *Annals of Mathematics Studies*, 396-407.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ РЕТРОСПЕКТИВНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Шариф Гусейнов

Transport and Telecommunication Institute

1 Lomonosov's Str., Riga LV-1019, LATVIA

Institute of Mathematics, Latvian Academy of Sciences and University of Latvia

1 Academia's Square, Riga, LV-1524, LATVIA

E-mail: sharif@one.lv (for short messages)

sharifg@tsi.lv (for large files)

В данной работе исследуется некорректная двумерная по пространственным переменным обратная задача для уравнения теплопроводности с обратным направлением времени. Обратные задачи такого типа возникают при исследовании теплофизических и ряда других процессов. Рассмотренную в данной работе обратную задачу можно интерпретировать как восстановление закона распределения температуры в ограниченной тонкой прямоугольной пластине в предыдущие моменты времени $t_0 \leq t < T$, если известно распределение температуры в пластине в конечный момент времени $t = T$. В работе доказывается, что рассмотренная обратная задача может иметь не более одного решения в пространстве $L_2 \{[0, l_1] \times [0, l_2]\}$. Кроме того, в работе получено необходимое условие для существования решения этой обратной задачи, а также иллюстрирована неустойчивость ее решения.

Одной из наиболее важных двумерных обратных задач для уравнения теплопроводности является задача с обратным направлением времени. В данной работе мы будем рассматривать эту задачу в случае первой краевой задачи. Сначала сформулируем первую краевую прямую задачу для уравнения теплопроводности с двумя пространственными переменными:

Требуется определить функцию $u = u(x, y, t)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = a^2 \cdot \left[\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right], \quad (0, l_1) \times (0, l_1) \times (t_0, T], \quad (1)$$

начальному условию

$$u(x, y, t)|_{t=t_0} = h_1(x, y), \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad 0 \leq y \leq l_2 \quad (2)$$

и краевым условиям

$$u(x, y, t)|_{x=0} = \varphi_1(y, t), \quad 0 \leq y \leq l_2, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(x, y, t)|_{x=l_1} = \varphi_2(y, t), \quad 0 \leq y \leq l_2, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$u(x, y, t)|_{y=0} = \psi_1(x, t), \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

$$u(x, y, t)|_{y=l_2} = \psi_2(x, t), \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (6)$$

Эту задачу можно интерпретировать следующим образом: известно распределение температуры $h_1(x, y)$ в начальный момент времени $t = t_0$ в ограниченной

тонкой прямоугольной пластине, на границах которой заданы определенные температуры (краевые условия (3)–(6)) и требуется определить распределение температуры $u(x, y, t)$ в пластине в последующие моменты времени $t > t_0$, причем процесс изучается за конечный период времени, т. е. $t_0 < t \leq T$.

Напомним, что выше сформулированная задача (1)–(6) является прямой задачей. Теперь сформулируем соответствующую обратную задачу:

Известно распределение температуры в ограниченной тонкой прямоугольной пластине в конечный момент времени $t = T$, т. е. задано

$$u(x, y, t)|_{t=T} = h_2(x, y), \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad 0 \leq y \leq l_2 \quad (7)$$

и требуется восстановить, по какому закону была распределена температура в начальный момент времени $t = t_0$, т. е. требуется определить функцию

$$h_1(x, y) = u(x, y, t)|_{t=t_0}, \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad 0 \leq y \leq l_2.$$

Теперь переходим к исследованию обратной задачи (1)–(7), где условие (2), в самом деле, отсутствует и подлежит восстановлению.

Как известно (например, см. [4], [7], [8]), при некоторых предположениях относительно функций $h_1(x, y)$, $\varphi_i(y, t)$, $\psi_i(x, t)$ ($i=1, 2$), решение прямой задачи (1)–(6) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = & \int_0^{l_1} d\xi \int_0^{l_2} G(x, y, \xi, \eta; t - t_0) \cdot h_1(\xi, \eta) d\eta + a^2 \cdot \int_0^t d\tau \int_0^{l_2} \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta; t - t_0 - \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \times \\ & \times \varphi_1(\eta, \tau) d\eta - a^2 \cdot \int_0^t d\tau \int_0^{l_2} \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta; t - t_0 - \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=l_1} \cdot \varphi_2(\eta, \tau) d\eta + \\ & + a^2 \int_0^t d\tau \int_0^{l_1} \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta; t - t_0 - \tau)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \psi_1(\xi, \tau) d\xi - a^2 \int_0^t d\tau \int_0^{l_1} \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta; t - t_0 - \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=l_1} \times \\ & \times \varphi_2(\eta, \tau) d\eta + a^2 \cdot \int_0^t d\tau \int_0^{l_1} \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta; t - t_0 - \tau)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \cdot \psi_1(\xi, \tau) d\xi - \\ & - a^2 \cdot \int_0^t d\tau \int_0^{l_1} \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta; t - t_0 - \tau)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=l_2} \cdot \psi_2(\xi, \tau) d\xi. \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} G(x, y, \xi, \eta; t) \equiv & \frac{4}{l_1 \cdot l_2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\pi^2 \cdot \left[\frac{n^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} \right] \cdot a^2 \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot \xi}{l_1}\right) \times \\ & \times \sin\left(\frac{\pi \cdot m \cdot y}{l_2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot m \cdot \eta}{l_2}\right) \end{aligned}$$

является функцией Грина для задачи (1)–(6).

В данной работе, ради простоты изложения и наглядности исследований, граничные условия (3)–(6) будем считать однородными, т. е.

$$\varphi_i(y, t) \equiv 0 \text{ и } \psi_i(x, t) \equiv 0 \quad (i = 1, 2). \tag{9}$$

Однако необходимо отметить, что полученные в данной работе результаты остаются верными и в случае неоднородных граничных условий (3)–(6).

Ясно, что тривиальные граничные условия (9) позволяют переписать формулу (8) в виде

$$u(x, y, t) = \frac{4}{l_1 \cdot l_2} \cdot \int_0^{l_1} d\xi \int_0^{l_2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\pi^2 \cdot \left[\frac{n^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} \right] \cdot a^2 \cdot (t-t_0)} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot \xi}{l_1}\right) \times \right. \\ \left. \times \sin\left(\frac{\pi \cdot m \cdot y}{l_2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot m \cdot \eta}{l_2}\right) \right\} \cdot h_1(\xi, \eta) d\eta \tag{10}$$

В формуле (10) двукратный интеграл сходится равномерно по ξ и η при $t > t_0$. Действительно, мажорантный двукратный ряд имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\pi^2 \cdot \left[\frac{n^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} \right] \cdot a^2 \cdot (t-t_0)}$$

Пусть $t - t_0 \geq \varepsilon > 0$, где ε – произвольное число. Тогда по признаку Даламбера

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \frac{e^{-\pi^2 \cdot \left[\frac{(n+1)^2}{l_1^2} + \frac{(m+1)^2}{l_2^2} \right] \cdot a^2 \cdot \varepsilon}}{e^{-\pi^2 \cdot \left[\frac{n^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} \right] \cdot a^2 \cdot (t-t_0)}} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \left\{ \frac{e^{-\left(\frac{\pi}{l_1}\right)^2 \cdot a^2 \cdot \varepsilon \cdot [n^2 + 2 \cdot n + 1]}}{e^{-\left(\frac{\pi}{l_1}\right)^2 \cdot a^2 \cdot \varepsilon \cdot n^2}} \cdot \frac{e^{-\left(\frac{\pi}{l_1}\right)^2 \cdot a^2 \cdot \varepsilon \cdot [m^2 + 2 \cdot m + 1]}}{e^{-\left(\frac{\pi}{l_1}\right)^2 \cdot a^2 \cdot \varepsilon \cdot m^2}} \right\} = \\ = e^{-\pi^2 \cdot a^2 \cdot \varepsilon \cdot \left[\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right]} \cdot \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \frac{1}{2 \cdot \pi^2 \cdot a^2 \cdot \varepsilon \cdot \left[\frac{n}{l_1} + \frac{m}{l_2} \right]} = 0.$$

Таким образом, мы можем изменить порядок суммирования и интегрирования в формуле (10) в области $t - t_0 \geq \varepsilon > 0$. В силу произвольности ε , это утверждение верно и для $t - t_0 > 0$, т. е. для $t > t_0$.

Итак,

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{l_1 \cdot l_2} \cdot \left\{ \int_0^{l_1} d\xi \int_0^{l_2} h_1(\xi, \eta) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot \xi}{l_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot m \cdot \eta}{l_2}\right) d\eta \right\} \times \\ \times e^{-\pi^2 \cdot \left[\frac{n^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} \right] \cdot a^2 \cdot (t-t_0)} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot m \cdot y}{l_2}\right).$$

В этой формуле подставим $t = T$ и учтем условие (7):

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{l_1 \cdot l_2} \cdot \left\{ \int_0^{l_1} d\xi \int_0^{l_2} h(\xi, \eta) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot \xi}{l_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot m \cdot \eta}{l_2}\right) d\eta \right\} \times$$

$$\times e^{-\pi^2 \left[\frac{n^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} \right] a^2 \cdot (T-t_0)} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot m \cdot y}{l_2}\right) = h_2(x, y), \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad 0 \leq y \leq l_2. \quad (11)$$

Таким образом, мы свели исходную обратную задачу (1)–(7) к уравнению (11) относительно неизвестной функции $h_1(x, y)$. Теперь покажем, что если существует решение уравнения (11) в пространстве $L_2 \{[0, l_1] \times [0, l_2]\}$, то оно единственное. Ввиду того, что уравнение (11) является линейным уравнением, то для доказательства единственности его решения, достаточно доказать, что оно имеет только тривиальное решение $h_1(x, y) \equiv 0$. Действительно, как известно (*например, см. [1], [9]*), система функций

$$\left\{ \delta_{n_1, m_1}(x, y) \right\}_{n_1, m_1=1}^{\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot m \cdot y}{l_2}\right) \right\}_{n_1, m_1=1}^{\infty}$$

является ортогональной в пространстве $L_2 \{[0, l_1] \times [0, l_2]\}$, т. е.

$$\int_0^{l_1} d\xi \int_0^{l_2} \sin\left(\frac{\pi \cdot n_1 \cdot \xi}{l_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot m_1 \cdot \eta}{l_2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n_2 \cdot \xi}{l_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot m_2 \cdot \eta}{l_2}\right) d\eta =$$

$$= \begin{cases} \frac{l_1 \cdot l_2}{4}, & \text{если } n_1 = n_2 \ \& \ m_1 = m_2; \\ 0, & \text{если } n_1 \neq n_2 \ \vee \ m_1 \neq m_2. \end{cases} \quad (12)$$

Поэтому, умножив уравнение (11) с нулевой правой частью на $\sin\left(\frac{\pi \cdot n_1 \cdot x}{l_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot m_1 \cdot y}{l_2}\right)$ и полученное выражение проинтегрировав в пределах от 0 до l_1 по переменной x и от 0 до l_2 по переменной y , получим

$$\int_0^{l_1} d\xi \int_0^{l_2} h_1(\xi, \eta) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n_1 \cdot \xi}{l_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot m_1 \cdot \eta}{l_2}\right) d\eta = 0 \quad (13)$$

для любых $n_1, m_1 \in \mathbb{N}$, где \mathbb{N} – множество натуральных чисел.

С другой стороны, система функций $\left\{ \delta_{n_1, m_1}(x, y) \right\}_{n_1, m_1=1}^{\infty}$ полна (*например, см. [1]*) в $L_2 \{[0, l_1] \times [0, l_2]\}$. Следовательно, равенство (13) означает, что существует такая функция $h_1(x, y) \in L_2 \{[0, l_1] \times [0, l_2]\}$, для которой $\langle h_1, \delta_{n_1, m_1} \rangle = 0$, где через $\langle f, g \rangle$ обозначено скалярное произведение функций f и g в пространстве $L_2 \{[0, l_1] \times [0, l_2]\}$. Другими словами, уравнение (13) означает, что функция $h_1(x, y)$ ортогональна полной в

пространстве L_2 системе функций. Следовательно, $h_1(x, y) \equiv 0, 0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2$. Как уже было сказано выше, только что доказанное утверждение и завершает доказательство единственности решения уравнения (11) с произвольной правой частью $h_2(x, y) \in L_2 \{[0, l_1] \times [0, l_2]\}$.

Теперь перейдем к исследованию вопроса о существовании решения уравнения (11) в пространстве L_2 . Из (12) видно, что система функций

$$\{\tilde{\delta}_{n,m}(x, y)\}_{n,m=1}^{\infty} \stackrel{def}{=} \frac{2}{\sqrt{l_1 \cdot l_2}} \cdot \{\delta_{n,m}(x, y)\}_{n,m=1}^{\infty}$$

является ортонормированной системой в $L_2 \{[0, l_1] \times [0, l_2]\}$ и, поэтому, если уравнение (11) с правой частью $h_2(x, y) \in L_2 \{[0, l_1] \times [0, l_2]\}$ имеет решение $h_1(x, y) \in L_2 \{[0, l_1] \times [0, l_2]\}$, то обозначая через $h_1^{n_1, m_1}$ и $h_2^{n_1, m_1}$ коэффициенты Фурье функции $h_1(x, y)$ и $h_2(x, y)$ соответственно, из уравнения (11) получим, что для любых $n_1, m_1 \in \mathbb{N}$ скалярное произведение $\langle h_1, \tilde{\delta}_{n_1, m_1} \rangle$ в пространстве L_2 равно

$$\begin{aligned} h_1^{n_1, m_1} &\stackrel{def}{=} \langle h_1(x, y), \tilde{\delta}_{n_1, m_1}(x, y) \rangle_{L_2 \{[0, l_1] \times [0, l_2]\}} = \frac{2}{\sqrt{l_1 \cdot l_2}} \cdot \int_0^{l_1} d\xi \int_0^{l_2} h_1(\xi, \eta) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n_1 \cdot \xi}{l_1}\right) \times \\ &\times \sin\left(\frac{\pi \cdot m_1 \cdot \eta}{l_2}\right) d\eta = \frac{2}{\sqrt{l_1 \cdot l_2}} \cdot \left\{ \int_0^{l_1} d\xi \int_0^{l_2} h_2(\xi, \eta) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n_1 \cdot \xi}{l_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot m_1 \cdot \eta}{l_2}\right) d\eta \right\} \times \\ &\times e^{+\pi^2 \cdot \left[\frac{n_1^2}{l_1^2} + \frac{m_1^2}{l_2^2} \right] \cdot a^2 \cdot (T-t_0)} = \langle h_2(x, y), \tilde{\delta}_{n_1, m_1}(x, y) \rangle_{L_2 \{[0, l_1] \times [0, l_2]\}} \cdot e^{+\pi^2 \cdot \left[\frac{n_1^2}{l_1^2} + \frac{m_1^2}{l_2^2} \right] \cdot a^2 \cdot (T-t_0)} \stackrel{def}{=} \\ &\stackrel{def}{=} h_2^{n_1, m_1} \cdot e^{+\pi^2 \cdot \left[\frac{n_1^2}{l_1^2} + \frac{m_1^2}{l_2^2} \right] \cdot a^2 \cdot (T-t_0)}. \end{aligned}$$

Итак,

$$h_1^{n_1, m_1} = h_2^{n_1, m_1} \cdot e^{+\pi^2 \cdot \left[\frac{n_1^2}{l_1^2} + \frac{m_1^2}{l_2^2} \right] \cdot a^2 \cdot (T-t_0)}. \tag{14}$$

Нам потребуется следующая известная теорема (например, см. [3]):

ТЕОРЕМА 1. Для ортонормированного множества $B \subset H$, где H – гильбертово пространство, следующие три утверждения эквивалентны:

- A.** Множество B полно;
- B.** Множество B служит ортонормированным базисом для H ;
- C.** Для $\forall \chi \in H$ справедливо равенство

$$\|\chi\|_H^2 = \sum_{\omega \in B} |\langle \chi, \omega \rangle|^2, \text{ которое известно как равенство Парсеваля.}$$

Используя эту теорему, можем утверждать, что система функций $\left\{ \tilde{\delta}_{n,m}(x,y) \right\}_{n,m=1}^{\infty}$ в пространстве L_2 является ортонормированным базисом (утверждение **В** в теореме 1) и справедливо равенство Парсеваля (утверждение **С** в теореме 1) для функции $h_1(x,y) \in L_2 \{ [0,l_1] \times [0,l_2] \}$. Тогда, используя соотношение (14), окончательно получим

$$\|h_1(x,y)\|_{L_2 \{ [0,l_1] \times [0,l_2] \}}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\langle h_2(x,y), \tilde{\delta}_{n,m}(x,y) \right\rangle_{L_2 \{ [0,l_1] \times [0,l_2] \}}^2 \cdot e^{2 \cdot \pi^2 \cdot \left[\frac{n^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} \right] \cdot a^2 \cdot (T-t_0)}. \quad (15)$$

Резюмируя вышесказанное, мы можем сформулировать следующую теорему:

ТЕОРЕМА 2. Для того, чтобы существовало решение уравнения (11) в пространстве $L_2 \{ [0,l_1] \times [0,l_2] \}$, и тем самым, решение обратной задачи (1)–(7) с обратным направлением времени в пространстве $L_2 \{ [0,l_1] \times [0,l_2] \}$, необходимо, чтобы функция $h_2(x,y) \in L_2 \{ [0,l_1] \times [0,l_2] \}$ из условия (7) была такова, что следующий двукратный ряд сходился:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[h_2^{n,m} \right]^2 \cdot e^{2 \cdot \pi^2 \cdot \left[\frac{n^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} \right] \cdot a^2 \cdot (T-t_0)} < \infty. \quad (16)$$

При этом норма искомой функции $h_1(x,y)$ определяется формулой (15).

Здесь $h_2^{n,m}$ – коэффициент Фурье заданной по (7) функции $h_2(x,y) \in L_2 \{ [0,l_1] \times [0,l_2] \}$.

Очевидно, что члены ряда (16) содержат экспоненциально возрастающий множитель

$$e^{2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot a}{l_1} \right)^2 \cdot (T-t_0) \cdot n^2} \cdot e^{2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot a}{l_2} \right)^2 \cdot (T-t_0) \cdot m^2}.$$

Поэтому, требование (16) достаточно сильно ограничивает класс возможных функций $h_2(x,y) \in L_2 \{ [0,l_1] \times [0,l_2] \}$. Другими словами, требование сходимости ряда из (16) накладывает достаточно сильное условие на степень убывания коэффициентов Фурье $h_2^{n,m}$. Ясно, что произвольная функция из пространства $L_2 \{ [0,l_1] \times [0,l_2] \}$ этому условию не удовлетворяет. Например, функция $f(x,y)$, заданная формулой

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C \cdot e^{-(n+m)} \cdot \sin \left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l_1} \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi \cdot m \cdot y}{l_2} \right),$$

где C – некоторая постоянная из \mathfrak{R}^1 , как легко проверить, является сколь угодно дифференцируемой функцией, т. е. $f(x,y) \in C^n \{ [0,l_1] \times [0,l_2] \}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Непосредственной проверкой (например, см. [2]) легко можем убедиться, что $f(x,y) \in L_2 \{ [0,l_1] \times [0,l_2] \}$ и

$$f^{n,m} \stackrel{def}{=} \left\langle f(x,y), \delta_{n,m}(x,y) \right\rangle_{L_2 \{ [0,l_1] \times [0,l_2] \}} = \int_0^{l_1} dx \int_0^{l_2} \frac{2}{\sqrt{l_1 \cdot l_2}} \cdot \sin \left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l_1} \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi \cdot m \cdot y}{l_2} \right) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{m_1=1}^{\infty} C \cdot e^{-(n_1+m_1)} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n_1 \cdot x}{l_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot m_1 \cdot y}{l_2}\right) dy = \\ & = C \cdot \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{m_1=1}^{\infty} e^{-(n_1+m_1)} \cdot \left\{ \frac{2}{\sqrt{l_1 \cdot l_2}} \cdot \int_0^{l_1} dx \int_0^{l_2} dy \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n_1 \cdot x}{l_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot m \cdot y}{l_2}\right) \times \right. \\ & \left. \times \sin\left(\frac{\pi \cdot m_1 \cdot y}{l_2}\right) dy \right\} = C \cdot e^{-n} \cdot e^{-m} . \end{aligned}$$

Итак,

$$f^{n, m} = C \cdot e^{-n} \cdot e^{-m} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} .$$

Учитывая это в двукратном ряде из (16), получим

$$\begin{aligned} & C^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-2 \cdot (n+m)} \cdot e^{2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot a}{l_1}\right)^2 \cdot (T-t_0) \cdot n^2} \cdot e^{2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot a}{l_2}\right)^2 \cdot (T-t_0) \cdot m^2} = \\ & = C^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot a \cdot \sqrt{T-t_0}}{l_1}\right)^2 \cdot n^2 - 2 \cdot n} \cdot e^{2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot a \cdot \sqrt{T-t_0}}{l_2}\right)^2 \cdot m^2 - 2 \cdot m} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} \infty , \end{aligned}$$

так как

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \left\{ e^{2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot a \cdot \sqrt{T-t_0}}{l_1}\right)^2 \cdot n^2 - 2 \cdot n} \cdot e^{2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot a \cdot \sqrt{T-t_0}}{l_2}\right)^2 \cdot m^2 - 2 \cdot m} \right\} = \infty .$$

Таким образом, обратная задача (1)–(7) с обратным направлением времени при условии $h_2(x, y) = f(x, y)$ не имеет решения.

Следует отметить, что исходная обратная задача (1)–(7) легко сводится к интегральному уравнению первого рода. Действительно, как уже было доказано выше, обратная задача (1)–(7) эквивалентна уравнению (11) относительно неизвестной функции $h_1(x, y)$. Выше так же было доказано, что в уравнении (11) можно изменить порядок суммирования и интегрирования. Итак, следующая запись правомерна:

$$Ah_1 \stackrel{def}{=} \int_0^{l_1} dx \int_0^{l_2} K(x, y; \xi, \eta; T-t_0) \cdot h_1(\xi, \eta) d\eta = h_2(x, y), \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad 0 \leq y \leq l_2, \quad (18)$$

где ядро $K(x, y; \xi, \eta; T-t_0)$ имеет следующий вид:

$$K(x, y; \xi, \eta; T-t_0) \stackrel{def}{=} \frac{4}{l_1 \cdot l_2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\pi^2 \cdot \left[\frac{n^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} \right] \cdot a^2 \cdot (T-t_0)} \cdot \delta_{n,m}(x, y) \cdot \delta_{n,m}(\xi, \eta) . \quad (19)$$

Покажем, что уравнение первого рода (18) с ядром (19) является интегральным уравнением Фредгольма первого рода. Действительно, так как в (19) каждый член ряда содержит экспоненциально убывающий при $n, m \rightarrow \infty$ множитель, то этот ряд, состоящий

из непрерывных функций, сходится равномерно. Следовательно (например, см. [1], [3]), сумма этого ряда, т. е. ядро $K(x, y; \xi, \eta; T - t_0)$ так же является непрерывной функцией в параллелепипеде $P(l_1, l_2) \stackrel{def}{=} \{0 \leq x \leq l_1\} \times \{0 \leq \xi \leq l_1\} \times \{0 \leq y \leq l_2\} \times \{0 \leq \eta \leq l_2\}$. Тогда, по теореме Вейерштрасса (например, см. [1], [3]), эта функция ограничена в указанной замкнутой области. Следовательно, интегральный оператор A , определяемый ядром (19), является ограниченным оператором в пространстве $L_2\{[0, l_1] \times [0, l_2]\}$. Как видно из (18) и (19), оператор A является так же линейным оператором из L_2 в L_2 . Известна (например, см. [2], [3], [9]) следующая теорема:

ТЕОРЕМА 3. Действующий из гильбертова пространства H в гильбертово пространство H линейный оператор A является непрерывным тогда и только тогда, когда он является ограниченным.

Из утверждения теоремы 3 вытекает, что оператор A , определяемый ядром $K(x, y; \xi, \eta; T - t_0)$, является непрерывным оператором. Следовательно (например, см. [5], [6]), для любой последовательности $\{f_n\}$, $f_n \in L_2$ такой, что $\|f_n\| \leq C \equiv const.$, найдется подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, $f_{n_k} \in L_2$ такая, что соответствующая подпоследовательность $\{Af_{n_k}\}$ сходится по норме L_2 . Тогда, из определения компактного множества следует (например, см. [3]), что оператор A , определяемый ядром $K(x, y; \xi, \eta; T - t_0)$ по формуле (19), отображает каждое ограниченное по норме множество элементов из L_2 в компактное множество. Иными словами, оператор A есть вполне непрерывный (компактный) оператор. А это означает (например, см. [5]), что уравнение (18) с ядром (19) есть интегральное уравнение Фредгольма первого рода в паре пространств $L_2\{[0, l_1] \times [0, l_2]\}$ и $L_2\{[0, l_1] \times [0, l_2]\}$. Тем самым, задача решения уравнения (18), (19) в этой паре пространств является неустойчивой задачей и, следовательно, некорректна.

Отметим также, что ядро $K(x, y; \xi, \eta; T - t_0)$ имеет непрерывные частные производные любого порядка, непрерывные в параллелепипеде $P(l_1, l_2)$. Поэтому, интегральный оператор A , определяемый этим ядром, можно рассматривать как оператор $A : C\{[0, l_1] \times [0, l_2]\} \rightarrow C^n\{[0, l_1] \times [0, l_2]\} \forall n \in \mathbb{N}$.

Легко можно показать, что и в этой паре пространств задача решения интегрального уравнения (18), (19) будет неустойчивой, следовательно, некорректной задачей. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассматривать следующий простой «контрпример»: очевидно, что для последовательности функций

$$f_{n, m}(x, y) = \tilde{C} \cdot \sqrt{n \cdot m} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot m \cdot y}{l_2}\right), \quad n, m \in \mathbb{N}$$

справедливо

$$\|f_{n, m}(x, y)\|_{C\{[0, l_1] \times [0, l_2]\}} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} \infty,$$

но, при этом

$$\|Af_{n, m}(x, y)\|_{C^k\{[0, l_1] \times [0, l_2]\}} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0,$$

где k – любое фиксированное натуральное число, а $\tilde{C} \equiv \text{const.}$, не зависящая от n и m .

Итак, мы показали неустойчивость обратной задачи (1)–(7) в паре пространств L_2, L_2 и $C, C^n \forall n \in \mathbb{N}$. Однако, попытка автора получить оценку устойчивости решения обратной задачи теплопроводности с обратным течением времени пока что не удалась.

В заключение, автор считает своим приятным долгом выразить свою искреннюю и глубокую признательность академику Академии Наук Латвии, профессору Латвийского Университета Андрису Буйкису и член корреспонденту Академии Наук Латвии, профессору Латвийского Университета Улдису Райтумсу за доброжелательное отношение к автору и за исключительное внимание к полученным результатам в данной работе.

Литература

1. Л.А.Люстерник, В.И.Соболев. *Элементы функционального анализа* (М.: Наука, 1965).
2. С.Л.Соболев. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике* (Новосибирск: СО АН СССР, 1962).
3. Н.Данфорд, Дж.Т.Шварц. *Линейные операторы. Общая теория, Том.1* (М.: Иностранная литература, 1962).
4. Г.Карслоу, Дж.Егер. *Теплопроводность твердых тел* (М.: Наука, 1964).
5. А.Н.Тихонов, В.Я.Арсенин. *Методы решения некорректных задач* (М.: Наука, 1986).
6. В.А.Морозов. *Регулярные методы решения некорректно поставленных задач* (М.: Наука, 1987).
7. Г.Джеффрис, Б.Свирлс. *Методы математической физики, Вып.1* (М.: Мир, 1969).
8. Г.Джеффрис, Б.Свирлс. *Методы математической физики. – Вып.2 и Вып.3* (М.: Мир, 1969).
9. М.А.Красносельский, П.П.Забрейко, Е.И.Пустыльник, П.Е.Соболевский. *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций* (М.: Наука, 1966).

ПРОБЛЕМА ИНВАРИАНТНОСТИ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ, ФУНКЦИОНИРУЮЩИХ В УСЛОВИЯХ РЕГУЛЯРНОГО ХАОСА

Валерий Никольский, Дмитрий Плячко

*Институт транспорта и связи
ул. Ломоносова 1, LV-1019 Рига, Латвия
E-mail: nv@tsi.lv, wind@apollo.lv*

Предлагаются новые модели отображений, ориентированные на решение задачи инвариантности в дискретных динамических системах, функционирующих в условиях детерминированного хаоса. На основе этих отображений даётся развитие понятия $K(E)$ – преобразования для квазистохастических последовательностей. Результатом является метод синтеза дискретных систем управления, который в сочетании с принципами классической теории случайных процессов позволяет осуществить компенсацию детерминированного хаоса и оптимальную фильтрацию стационарной случайной помехи.

Ключевые слова: теория инвариантности, детерминированный хаос, $K(E)$ – преобразование

Введение

Проектирование дискретной системы автоматического управления часто связано с отысканием принципов её построения и расчёта, предусматривающих полную или частичную компенсацию внешних возмущений f_n . Методы решения этой проблемы существенно зависят от априорных сведений о системе управления. Ряду автоматических систем характерен некоторый класс опасных возмущающих воздействий. Возникает задача создания автоматических систем, инвариантных к таким внешним воздействиям. Эффективным аппаратом достижения инвариантности может служить $K(E)$ – преобразование решетчатых функций. В настоящее время понятие $K(E)$ – преобразования охватывает следующие характерные случаи:

- a) форма решетчатой функции задана;
- b) функция априори не задана аналитически, но является измеряемой на участке наблюдения;
- c) функция случайна с известной корреляционной функцией;
- d) априорная информация о случайной функции отсутствует;
- e) функция описывает квазидетерминированный сигнал.

Поясним кратко сущность $K(E)$ – преобразования для указанных случаев. $K(E)$ – преобразование для дискретных функций с известным аналитическим описанием раскрывается в работе [1]:

$$K(E) = 1 + c_0 E^{-1} + \dots + c_N E^{-N-1}. \quad (1)$$

Для заданных дискретных функций аннулирующий оператор $K(E)$ находится в виде полинома от символа сдвига E^{-1} так, чтобы $K(E) f_n = 0$ или $f_n + c_0 f_{n-1} + \dots + c_N f_{n-N-1} = 0$. Здесь $n = 0, 1, 2, \dots$; c_0, \dots, c_N – некоторые постоянные коэффициенты. Таким образом, функцию f_n можно трактовать как решение однородного разностного уравнения, заданного $K(E)$ – преобразованием (случай a).

Когда описание функции возмущения f_n неизвестно, оператор $K(E)$ находится в результате решения экстраполяционной задачи, связанной с продолжением функции,

устанавливаемой на участке наблюдения на один шаг вперед, с сохранением её аналитического вида [2] (случай b).

Для возмущений в виде стационарных случайных последовательностей с известными корреляционными функциями оператор $K(E)$ определяется при решении задачи оптимального статистического прогноза [3,4] (случай c).

При априори неизвестной корреляционной функции расчет $K(E)$ – преобразований основан на применении алгоритмов самообучения [5] (случай d).

Когда возмущение представляет собой квазидетерминированный сигнал, оператор $K(E)$ устанавливается при рассмотрении системы разностных уравнений, порождающих исходный процесс (случай e). Этот результат содержится в работе [6].

Анализ $K(E)$ – преобразований показывает, что по мере роста априорной неопределенности относительно сигнала всё большая роль при определении оператора $K(E)$ отводится нелинейным алгоритмам. Система управления становится нелинейной. Интерес к нелинейным системам имеет и другое объяснение. За последние годы в физике и технике возникло понимание того, что некоторые нелинейные дифференциальные или разностные уравнения, описывающие поведение динамических систем или действующих в них сигналов и не содержащие случайных параметров ни в самих уравнениях, ни в начальных условиях могут иметь решения, которые носят хаотический характер. С пониманием данного факта возникло уточнение понятия хаотического процесса. Сейчас чаще говорят о детерминированном (динамическом) хаосе [7, 8, 9], подчёркивая детерминированность в шумоподобном поведении сигнала. Детерминированный хаос (квазистохастический процесс) обладает многими свойствами случайных колебаний: сплошным спектром мощности, экспоненциально спадающей корреляционной функцией, непредсказуемостью на больших интервалах времени. Кроме того, оказалось, что детерминированный хаос по своей природе гораздо ближе к реальным процессам [8,10]. Между тем проблема инвариантности для данной ситуации пока не изучена. В этой связи цель настоящей статьи – дать обобщение понятия $K(E)$ – преобразования на класс квазистохастических сигналов и на его основе развить метод синтеза дискретных систем управления, инвариантных к детерминированному хаосу.

$K(E)$ – преобразование детерминированных хаотических последовательностей

Рассмотрим ситуацию, когда моделью возмущающего сигнала f_n является нелинейное разностное уравнение (отображение) вида:

$$f_{n+1} = \Phi(h_i, f_n, f_{n-1}, \dots, f_{n-N+1}), \quad i = \overline{1, k} \quad (2)$$

при определенных значениях начальных условий и параметров управления h_i . Среди дискретных отображений вида (2) в настоящее время широко исследованы: логистическое отображение и отображение Хенона [11]. Другими важными частными случаями уравнения (1) могут служить формулы нелинейного экстраполирования вида:

$$f_{n+1} = h(1 - f_{n-1}^2)f_n, \quad (3)$$

$$f_{n+1} = h(1 - f_n f_{n-1})f_n, \quad (4)$$

где h – варьируемый параметр. Изменяя в уравнениях (3) и (4) начальные условия и внешний параметр h , можно получить различные сценарии перехода к динамическому хаосу. Общих математических методов позволяющих решать подобные уравнения в явном виде, в настоящее время не найдено. Единственный доступный метод изучения –

вычислительный эксперимент. Как показывает численное моделирование, введение в логистическое уравнение запаздываний позволяет получить разнообразие динамических режимов, в том числе колебательных и квазистохастических.

На рис. 1 и 2 приведены соответственно итерации уравнения (3) и проекция фазовой траектории на плоскость с координатами f_n, f_{n+1} при $h = 1.525, f_0 = f_1 = 0.5$.

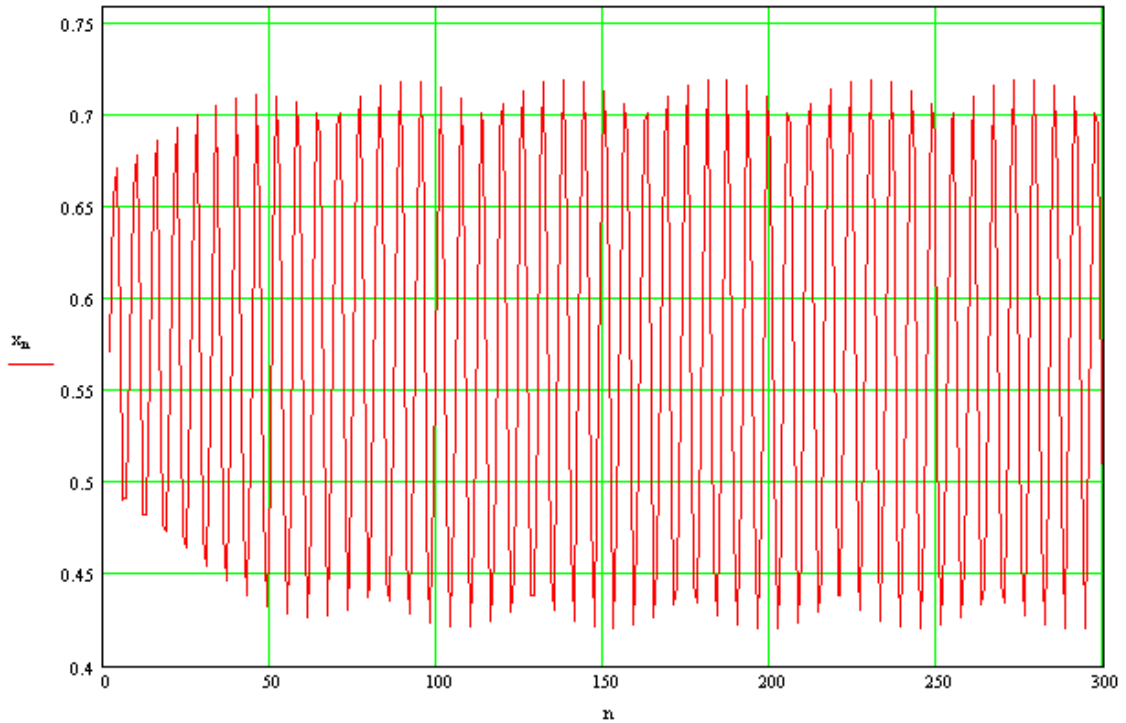


Рис. 1. График зависимости f_n от числа шагов для отображения (3) при $h = 1.525, f_0 = f_1 = 0.5$

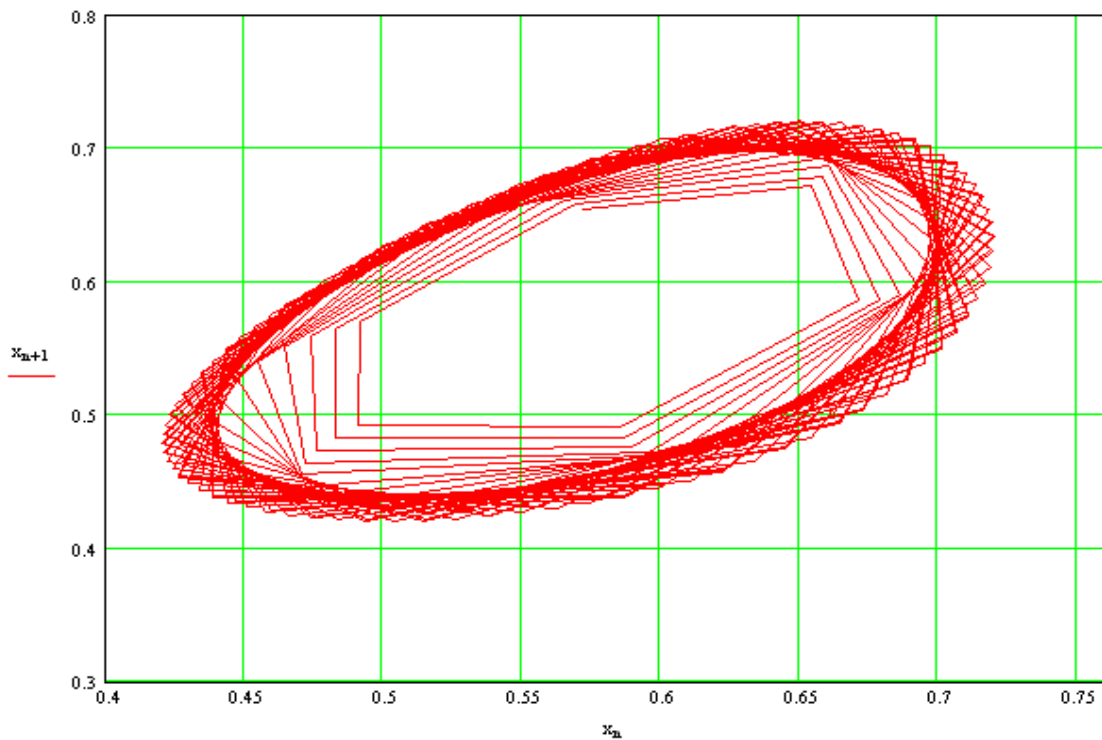


Рис. 2. Фазовый портрет для отображения (3) при $h = 1.525, f_0 = f_1 = 0.5$

На рис. 3 приведён пример хаотических колебаний для модели (3). Рис. 4 отображает соответствующий им фазовый портрет в координатах f_n , f_{n+1} при $h = 1.99$, $f_0 = 1.1$ и $f_1 = 0.5$.

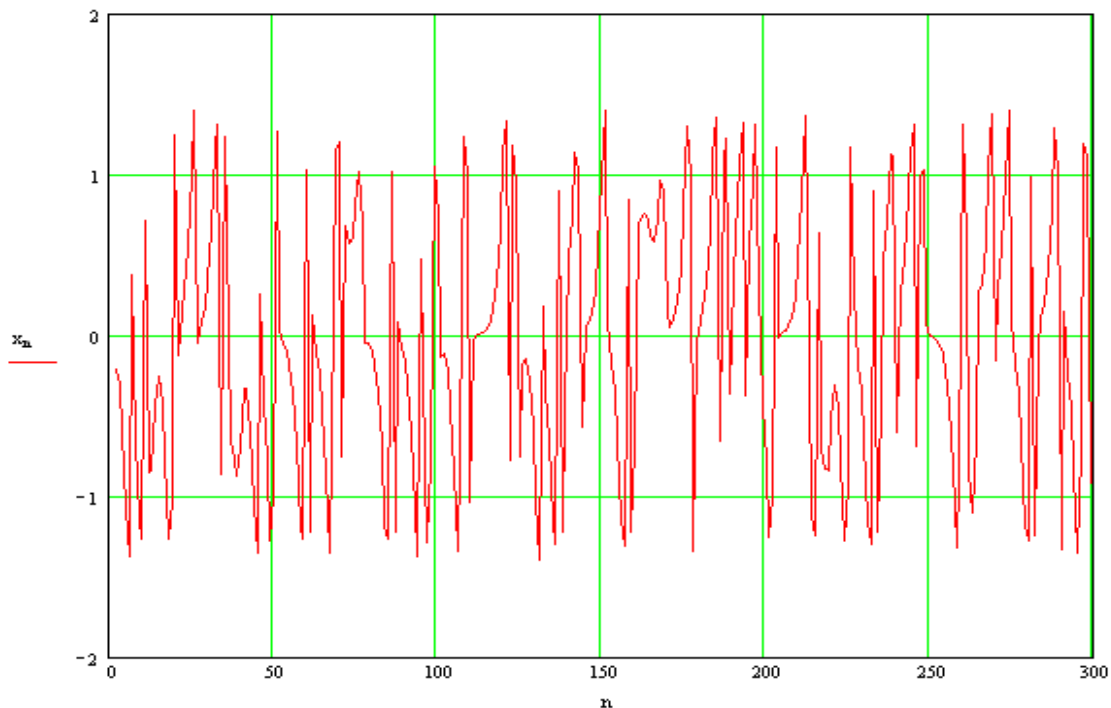


Рис. 3. График зависимости f_n от числа шагов для отображения (3) при $h = 1.99$, $f_0 = 1.1$, $f_1 = 0.5$

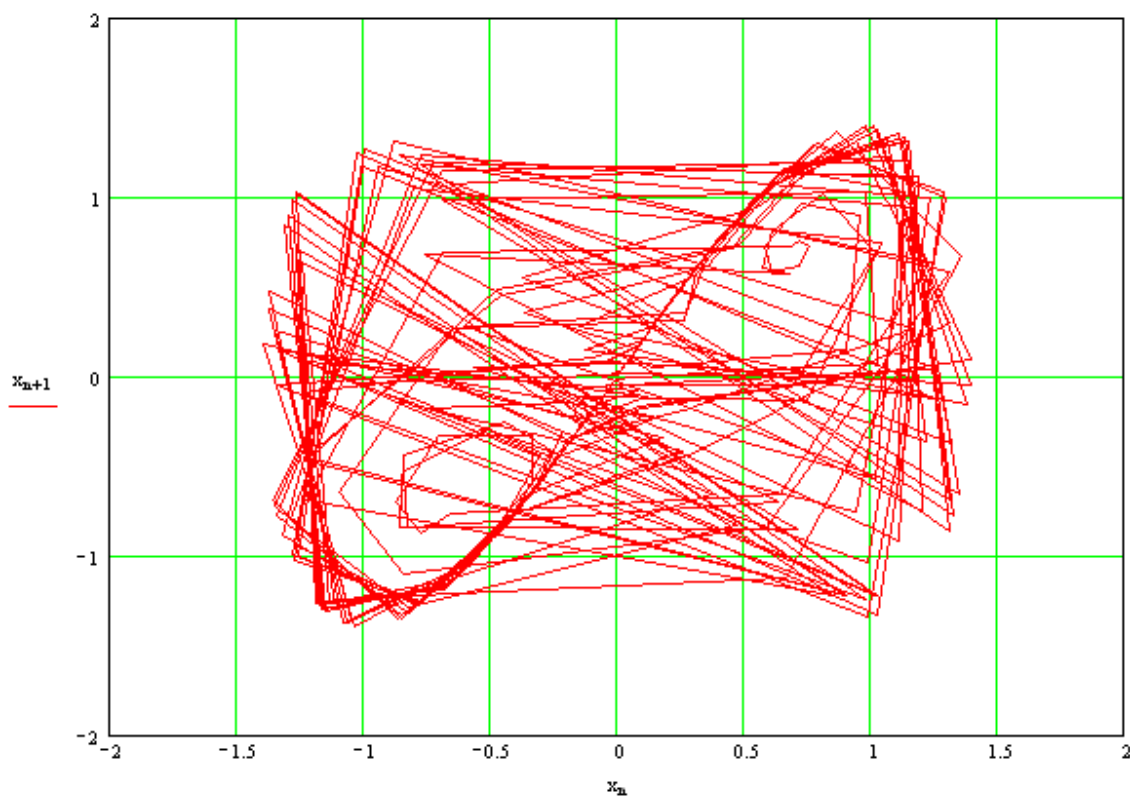


Рис. 4. Фазовый портрет для отображения (3) при $h = 1.99$, $f_0 = 1.1$, $f_1 = 0.5$

Рис. 5 (график зависимости f_n от числа шагов) и рис. 6 (фазовый портрет) иллюстрирует ситуацию возникновения хаотических колебаний для отображения модели (4) при $h = 2.2045$, $f_0 = 1$, $f_1 = 0.5$.

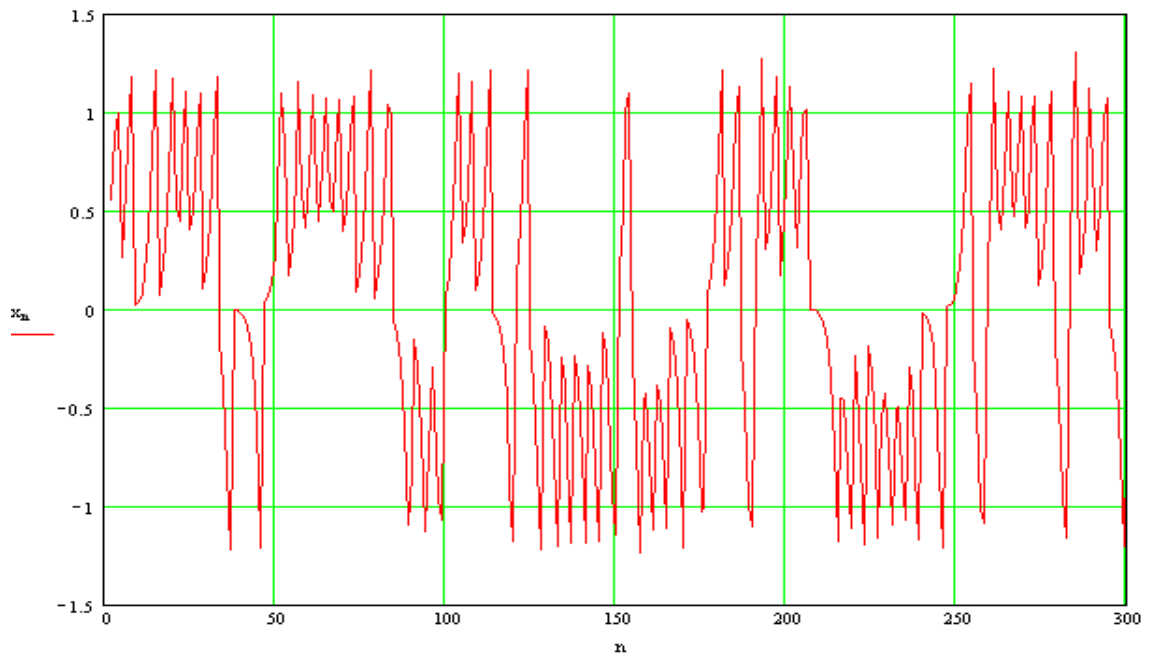


Рис. 5. График зависимости f_n от числа шагов для отображения (4) при $h = 2.2045, f_0 = 1, f_1 = 0.5$.

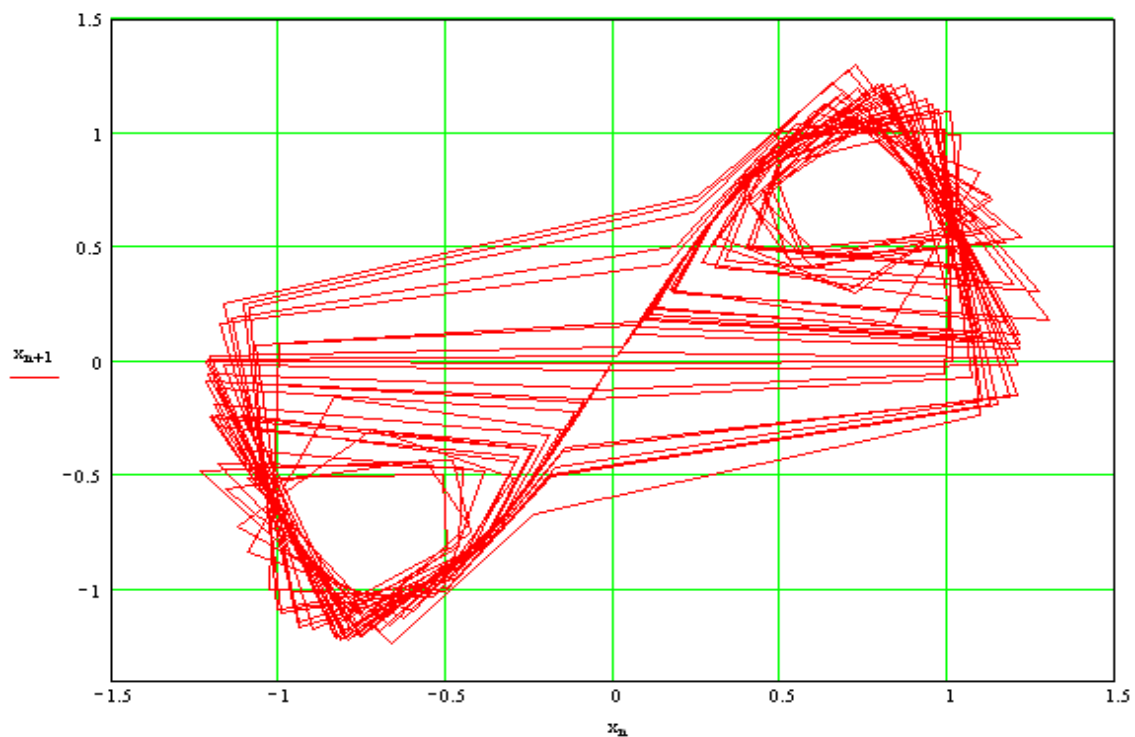


Рис. 6. Фазовый портрет для отображения (4) при $h = 2.2045, f_0 = 1, f_1 = 0.5$

Видно, что аттрактор на рис. 6 напоминает известный странный аттрактор Лоренца, полученный при решении нелинейной системы трёх дифференциальных уравнений [12].

На рис. 7 и 8 приведены соответственно итерации уравнения (4) и проекция фазовой траектории на плоскость с координатами f_n, f_{n+1} при $h = 2, f_0 = 0.6, f_1 = 0.9$.

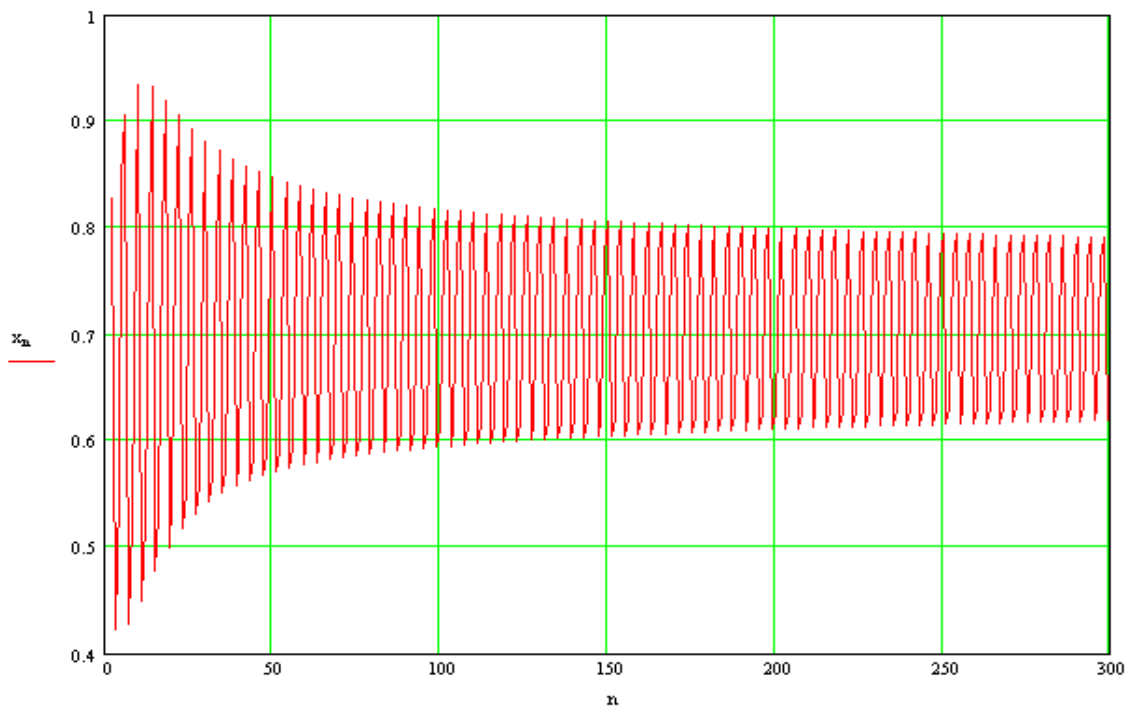


Рис. 7. График зависимости f_n от числа шагов для отображения (4) при $h = 2, f_0 = 0.6, f_1 = 0.9$.

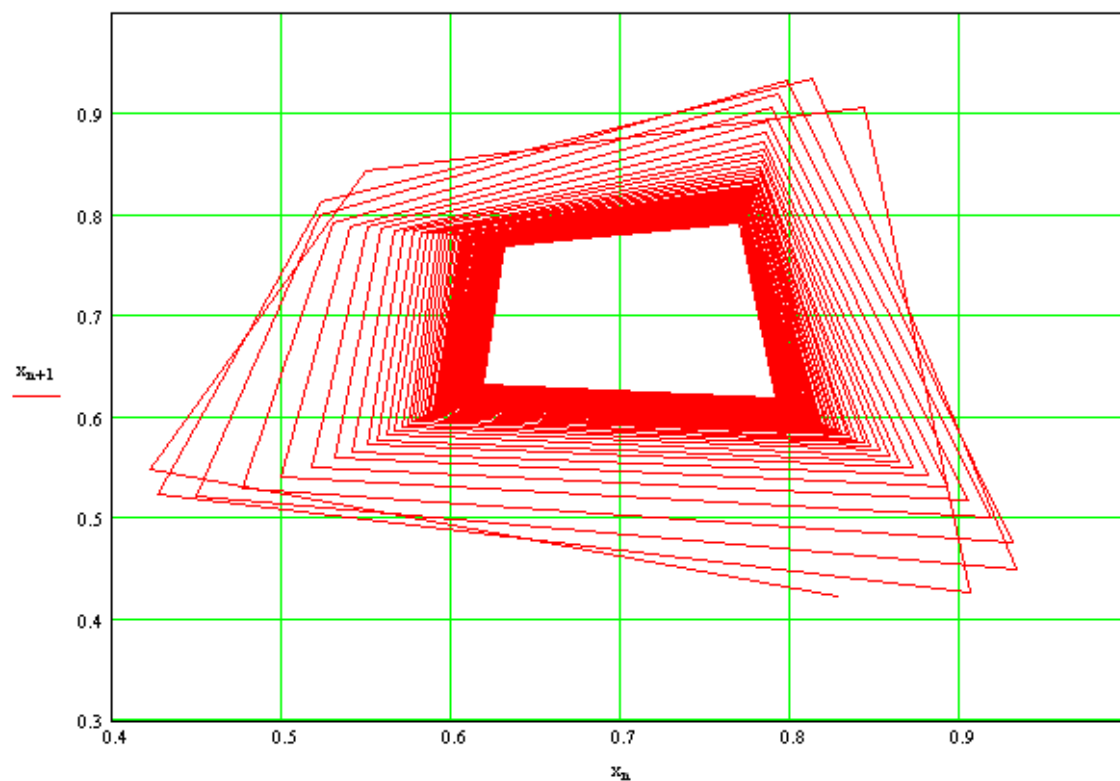


Рис. 8. Фазовый портрет для отображения (4) при $h = 2, f_0 = 0.6, f_1 = 0.9$

Отображение вида (2) и соответствующие ему частные случаи могут служить исходными соотношениями при формировании $K(E)$ – преобразования для квазистохастических сигналов.

Поясним методику получения $K(E)$ – преобразований на примере логистического отображения:

$$f_{n+1} = rf_n - sf_n^2. \tag{5}$$

Для простоты последующих выкладок перепишем логистическое уравнение в виде [11]:

$$f_{n+1} = h(1 - f_n)f_n, \tag{6}$$

где h – управляющий параметр, f_n принадлежит интервалу $[0, 1]$. Понизив в уравнении (6) индекс n на единицу, составим систему из двух рекуррентных уравнений:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= h(1 - f_n)f_n, \\ f_n &= h(1 - f_{n-1})f_{n-1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Определив из второго уравнения системы (7) параметр h и подставив его значение в первое уравнение, получим:

$$f_{n+1} = \frac{f_n(1 - f_n)}{f_{n-1}(1 - f_{n-1})} f_n. \tag{8}$$

Отсюда искомое значение оператора $K(E)$ примет вид:

$$K(E) = E - a, \tag{9}$$

где a – параметр адаптивного дискретного фильтра

$$a = \frac{(1 - f_n)f_n}{(1 - f_{n-1})f_{n-1}}. \tag{10}$$

Значение $K(E)$ – преобразований для некоторых типовых отображений приведены в табл. 1 которые могут быть использованы при синтезе управления.

Таблица 1. Важнейшие соответствия для квазистохастических сигналов

N	Типовое отображение	$K(E)$ - преобразование	Параметр фильтра
1	$f_{n+1} = rf_n - sf_n^2$	$E - a_1$	$a_1 = \frac{f_{n-1}^2(f_n - f_{n-1}) + f_n f_{n-2}(f_{n-2} - f_n)}{f_{n-1} f_{n-2}(f_{n-2} - f_{n-1})}$
2	$f_{n+1} = h(1 - f_{n-1}^2)f_n$	$E - a_2$	$a_2 = \frac{(1 - f_{n-1}^2)f_n}{(1 - f_{n-2}^2)f_{n-1}}$
3	$f_{n+1} = h(1 - f_n f_{n-1})f_n$	$E - a_3$	$a_3 = \frac{(1 - f_n f_{n-1})f_n}{(1 - f_{n-1} f_{n-2})f_{n-1}}$
4	$f_{n+1} = h(b - f_{n-1}^2)f_n$	$E - a_4$	$a_4 = \frac{f_n}{f_{n-1}} + \frac{(f_n f_{n-2} - f_{n-1}^2)(f_{n-2}^2 - f_{n-1}^2)}{f_{n-1} f_{n-2}(f_{n-3}^2 - f_{n-2}^2)}$
5	$f_{n+1} = h(b - f_n f_{n-1})f_n$	$E - a_5$	$a_5 = \frac{f_n}{f_{n-1}} + \frac{(f_{n-2} - f_n)(f_n f_{n-2} - f_{n-1}^2)}{f_{n-2}^2(f_{n-3} - f_{n-1})}$

Заметим, что в отображениях (2–7) r, s, h и b можно интерпретировать как внешние параметры.

Решение задачи синтеза

Структурная схема исследуемой системы автоматического управления изображена на рис. 9.

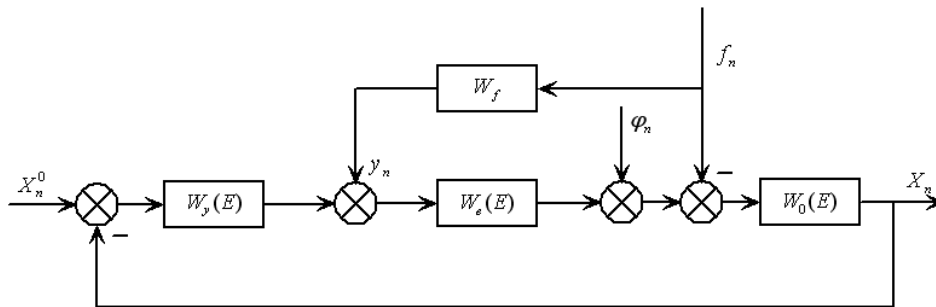


Рис. 9. Структурная схема дискретной системы управления

Принятые на нём обозначения:

$W_0(E) = R_0(E) / Q_0(E)$ – передаточная функция объекта управления, записанная в символической форме;

$W_e(E) = R_e(E) / Q_e(E)$ – передаточная функция исполнительного элемента;

$W_y(E) = R_y(E) / Q_y(E)$ – передаточная функция управляющего устройства;

$W_f = R_f / Q_f$ – оператор канала регулирования по возмущению;

x_n^0 – желаемое значение регулируемой величины;

x_n – фактическое значение регулируемой величины;

f_n – детерминированный хаос (возмущающее воздействие);

φ_n – неконтролируемая помеха, которая принимается в виде стационарной случайной последовательности;

Ставится задача: обеспечить конечную длительность переходного процесса, нулевую установившуюся ошибку, вызываемую квазистохастической последовательностью f_n и минимальное значение дисперсии ошибки фильтрации, вызываемой случайной помехой φ_n . В соответствии с методом К(Е) – преобразования решение задачи синтеза включает два этапа.

На первом этапе определяется передаточная функция управляющего устройства:

$$W_y(E) = \frac{1}{K(E)} \frac{1}{K_\varphi(E)} \frac{M(E)}{P(E)} \quad (11)$$

Здесь сомножитель $1/K(E)$ вводится в $W_y(E)$ для воспроизведения на выходе системы исходной программы x_n^0 . При этом оператор $K(E)$ является $K(E)$ – преобразованием аналитически заданной функции x_n^0 . Оператор $1/K_\varphi(E)$ включается в

$W_y(E)$ для фильтрации случайной помехи φ_n . Вид операторов $K(E)$ и $K_\varphi(E)$ определяется из таблиц [6].

Сомножитель:

$$\frac{M(E)}{P(E)} = \frac{M_i E^i + M_{i-1} E^{i-1} + \dots + M_1 E + M_0}{E^q + P_{q-1} E^{q-1} + \dots + P_1 E + P_0}, \quad (12)$$

вводится в $W_y(E)$ для выполнения условия конечного времени переходного процесса системы. Последнее достигается приравниванием нулю коэффициентов характеристического уравнения замкнутой системы за исключением коэффициента при старшей степени E . Порядок полинома $M(E)$ определяется формулой: $i = \alpha + \gamma - 1$, где α – суммарный порядок операторов $K(E)$ и $K_\varphi(E)$; γ и q – соответственно степени числителя и знаменателя передаточных функций неизменяемой части системы.

На втором этапе определяется передаточная функция канала регулирования по возмущению f_n :

$$W_f = \frac{Q_e(E)Q_y(E) - A(E)K_f(E)}{R_e(E)Q_y(E)}, \quad (13)$$

где оператор $K_f(E)$ вводится для компенсации возмущения f_n .

Сомножитель $A(E) = E^l$ обеспечивает физическую реализуемость оператора W_f , причём $l = m - d$, m – суммарная степень полиномов $Q_y(E)$ и $Q_e(E)$, d – порядок оператора $K_f(E)$. Будем считать, что уравнения $R_e(E) = 0$ и $Q_y(E) = 0$ не содержат корней вне круга единичного радиуса.

Определив выражения для ошибок по соответствующим воздействиям, нетрудно убедиться, что изложенный метод синтеза полностью удовлетворяет перечисленным требованиям.

Проиллюстрируем изложенный метод синтеза на расчётном примере.

Пример. Пусть для схемы, представленной на рис. 4, передаточная функция объекта управления $W_0(E) = \frac{E}{(E-1)}$. Исполнительный элемент осуществляет запаздывание на один такт. Отсюда следует, что $W_e(E) = \frac{1}{E}$. Корреляционная функция помехи $R_\varphi(k) = \exp(-\alpha |k|)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, α – параметр затухания, $K_\varphi(E) = E - e^{-\alpha}$. Хаотическое возмущение имеет отображение вида: $f_{n+1} = h(1 - f_n f_{n-1})f_n$, $x_n^0 = const$. Задача заключается в том, чтобы при заданных условиях осуществить синтез инвариантной дискретной системы автоматического управления на основе $K(E)$ – преобразования.

Для решения указанной задачи необходимо выполнить следующие операции:

- Определим передаточную функцию управляющего устройства, исходя из (11) и (12):

$$W_y(E) = \frac{M_1 E + M_0}{E - e^{-\alpha}}. \quad (14)$$

- Находим передаточную функцию разомкнутой системы:

$$W(E) = \frac{R(E)}{Q(E)} = \frac{E(M_1 E + M_0)}{(E-1)(E - e^{-\alpha})E}. \quad (15)$$

- Составим характеристический полином замкнутой системы $N(E)$. Используя условия конечной длительности переходного процесса, найдём коэффициенты M_0 и M_1 :

$$N(E) = R(E) + Q(E) = E^3 + b_1E^2 + b_2E, \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= M_1 - e^{-\alpha} - 1, \\ b_2 &= M_0 + e^{-\alpha}. \end{aligned} \tag{17}$$

Положив $b_1 = b_2 = 0$, получим $M_0 = -e^{-\alpha}$, $M_1 = 1 + e^{-\alpha}$.

- С учётом функции (13) определяем оператор канала регулирования по возмущению:

$$W_f(E) = \frac{E(a_3 - e^{-\alpha})}{E - e^{-\alpha}} \tag{18}$$

Параметр a_3 находится из табл. 1. Из формулы для W_f следует, что практическая реализация условий инвариантности связана с построением адаптивного дискретного фильтра. Структурная схема данного фильтра приведена на рис. 10.

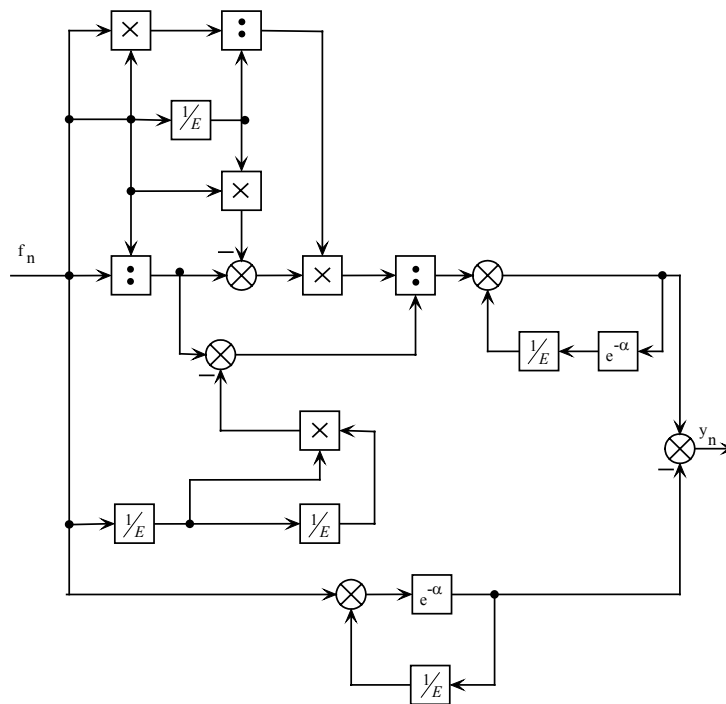


Рис. 10. Структурная схема цифрового обучающегося фильтра

- Вычисляем передаточную функцию системы по возмущению f_n :

$$\frac{x_n}{f_n} = \frac{(W_f W_e - 1)W_0}{1 + W_0 W_e W_y} = \frac{a_3 - E}{E}. \tag{19}$$

- Определяем составляющую регулируемой величины, вызываемой возмущением f_n :

$$x_{n,f} = \frac{a_3 - E}{E} f_n = \frac{(1 - f_{n-1}f_{n-2})f_{n-1}}{(1 - f_{n-2}f_{n-3})f_{n-2}} f_{n-1} - f_n. \tag{20}$$

- Исходя из аннулирующего свойства оператора $K(E)$ легко установить, что спустя три такта $x_{n,f} = 0$. Последнее равенство будет иметь место только в том случае, когда регистрация f_n производится точно.
- Находим спектральную плотность и дисперсию выхода системы с учётом воздействия помехи φ_n :

$$r(z) = \Phi(z)\Phi(z^{-1})r_\varphi(z) = 1 - e^{-2\alpha}, \tag{21}$$

где z – переменная дискретного преобразования Лапласа,
 $r_\varphi(z)$ – спектральная плотность помехи,

$$r_\varphi(z) = \frac{(e^{-2\alpha} - 1)z}{e^{-2\alpha}z^2 - (1 + e^{-2\alpha})z + e^{-\alpha}}, \tag{22}$$

$$\Phi(z) = \frac{W_0}{1 + W_0W_eW_y}, \tag{23}$$

z – передаточная функция системы, получаемая из $\Phi(E)$ при замене E на z . Отсюда дисперсия выхода системы: $D = 1 - e^{-2\alpha}$. Таким образом, установившийся режим в системе управления достигается за три такта. Реакция выхода системы при действии детерминированного хаоса равна нулю, и осуществляется оптимальная фильтрация случайной помехи, что и требовалось.

Вычислительный эксперимент

С целью проверки эффективности работы синтезированного адаптивного фильтра был проведён вычислительный эксперимент для отображения (4) при значении управляющего параметра h , равного 2 и 2.2045 и начальных условиях соответственно $x_0=0.6$, $x_1=0.9$, и $x_0=1$, $x_0=0.5$. Результаты вычислительного эксперимента для случая регулярных колебаний приведены на рис. 11.

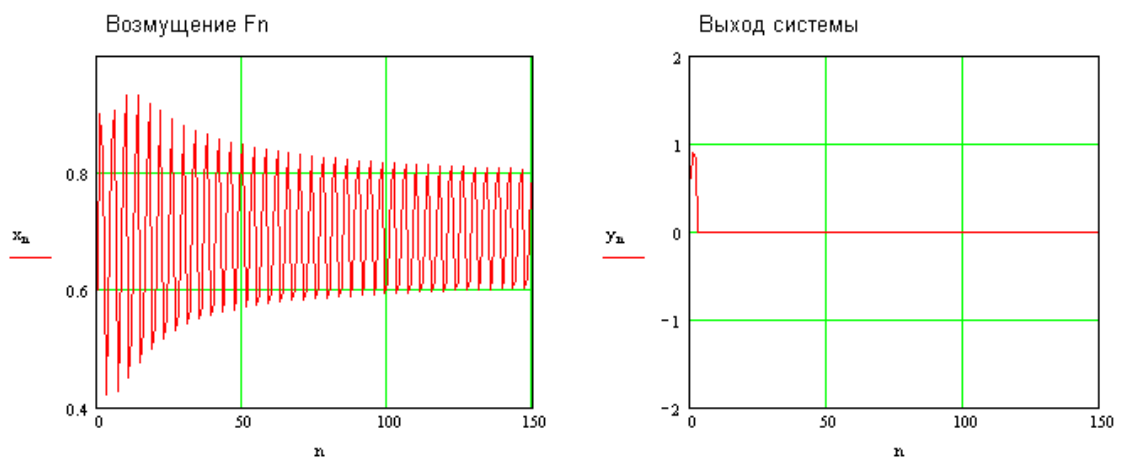


Рис. 11. Графики изменения возмущающего воздействия и выхода системы для случая регулярных колебаний f_n .

В том случае, когда возмущения f_n носит хаотический характер, результаты эксперимента приведены на рис. 12.

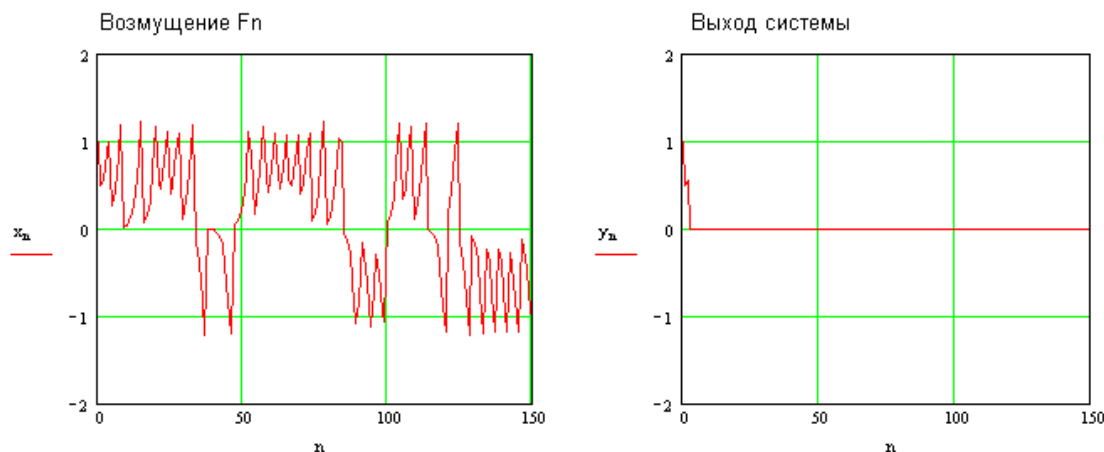


Рис. 12. Графики изменения возмущающего воздействия и выхода системы для случая хаотических колебаний f_n

Результаты вычислительного эксперимента подтверждают правильность теоретической концепции в отношении компенсации возмущающего воздействия, как для регулярных, так и хаотических колебаний.

Заключение

Отдельные возмущения в системах управления могут быть интерпретированы как квазистохастические функции дискретного времени.

Показано, что математической основой решения проблемы инвариантности в случае детерминированного хаоса может служить аппарат $K(E)$ – преобразования для псевдослучайных сигналов.

С использованием $K(E)$ – преобразования установлен метод синтеза инвариантных дискретных систем управления, функционирующих в условиях динамического хаоса и стационарной случайной помехи.

Решение задачи синтеза просто и компактно. Это делает предлагаемый подход практически приемлемым при инженерных расчётах.

Литература

- [1] Никольский В.А. Синтез дискретных инвариантных автоматических систем с помощью $K(E)$ – преобразования. // Автоматика и вычислительная техника, - 1969. - № 4, с. 47-52
- [2] Никольский В.А., Севастьянов Н.П. $K(E)$ – преобразование решетчатых функций в задачах исследования дискретных систем. – В кн.: Автоматика и электромеханика. – М.: Наука, 1973.
- [3] Никольский В.А., Севастьянов Н.П. Метод фильтрации возмущений в дискретных системах управления на основе $K(E)$ – преобразования. Труды 5 Всесоюзного совещания. Теория инвариантности и её применение. Киев. Наукова думка, 1979, с. 337-346.
- [4] Никольский В.А. О связи винеровского метода оптимальной фильтрации принципа инвариантности на основе $K(E)$ – преобразования. ВИНТИ «Депонированные научные работы», № 3, 1986.

- [5] *Никольский В.А.* Применение принципа комбинированного регулирования в задаче оперативного управления запасами. Экономика и математические методы. Том 16, вып. 5, 1980, с. 921-929.
- [6] *Никольский В.А.* Метод шагового регулирования длины очереди в мультипроцессорной вычислительной системе с переменным режимом обслуживания //Автоматика и вычислительная техника. – 1998. - № 6 – с. 61-70.
- [7] *Малинецкий Г.Г.* Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент. – М.: Наука, 1997.
- [8] *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. – М.: Наука, 1997.
- [9] *Кравцов В.А.* Случайность как предсказуемость: концепция частичной детерминированности. Радиотехника и электроника. Том 35. Вып. 1. 1990.
- [10] *Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б.* Математические модели биологических продукционных процессов. Издательство Московского университета, 1993.
- [11] *Шустер Г.* Детерминированный хаос. – М.: Мир, 1998.
- [12] *Jose C. Principe, Ludong Wang, Mark A. Motter.* Local Dynamic Modeling with Self-Organizing Maps and Applications to Nonlinear System Identification and Control. Proceedings of the IEEE Vol. 86 No. 11. 1998, P. 2240-2258.

УПРАВЛЕНИЕ ВРЕМЕНЕМ ПРЕБЫВАНИЯ ЗАДАНИЙ В ОДНОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Валерий Никольский, Александр Зиновьев

*Институт транспорта и связи
Ломоносова 1, Рига, LV-1019, Латвия.
Тел.: (+371)-7100650. Факс: (+371)-7100660. E-mail: narg@one.lv, nv@tsi.lv*

Рассматривается задача построения математической модели системы дискретного регулирования в системах массового обслуживания с очередями. Устанавливаются расчетные соотношения для определения производительности прибора обслуживания, обеспечивающего требования относительно допустимого времени пребывания заданий в системе в условиях переменной нагрузки. Приводятся результаты вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: система массового обслуживания, время пребывания задания в системе, время реакции, дискретное управление

1. Введение

Одним из важных показателей качества работы систем массового обслуживания (СМО) является время пребывания заданий в системе с учетом переменной нагрузки.

Цель статьи – построить математическую модель системы управления временем пребывания заданий (заявок) в системе с очередями и получить основные расчетные соотношения для определения производительности обслуживающего модуля в условиях меняющейся интенсивности потока заявок.

2. Описание модели

Функциональная модель исследуемой системы включает в себя источник заявок, очередь и обслуживающее устройство (сервис). Задания из источника поступают в очередь к сервису. Дисциплина обслуживания – в порядке поступления (FIFO). Тогда для k -того интервала наблюдения можно записать [1]:

$$W_{k+1} = W_k + S_k - \tau_k, \quad (1)$$

где k – целое число.

В уравнении (1) W_k – время ожидания k -ой заявки начала обслуживания; S_k – величина времени, выделяемого сервисом для обслуживания задания с номером k ; $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ – интервал времени между двумя заявками, поступающими в систему в случайные моменты времени t_0, t_1, t_2, \dots ; t_k – момент появления k -ой заявки.

Уравнение (1) можно переписать в виде:

$$W_{k+1} + S_{k+1} = W_k + S_k + S_{k+1} - \tau_k. \quad (2)$$

В уравнении (2) сумма $W_k + S_k = n_k$ – время пребывания k -ого клиента в системе. Тогда для уравнения (2) получим:

$$n_k + S_{k+1} - \tau_k = n_{k+1}. \quad (3)$$

Применяя к уравнению (3) оператор сдвига, найдем:

$$(E - 1)n_k = ES_k - \tau_k. \quad (4)$$

При этом структурная схема объекта управления примет вид, изображенный на рис. 1.

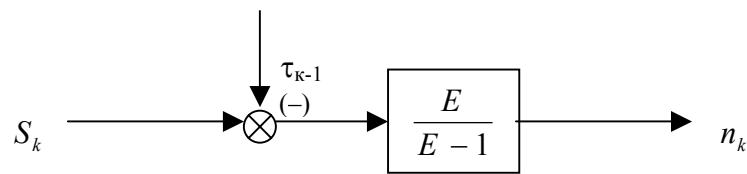


Рис. 1. Структурная схема объекта управления

С целью обеспечения требования относительно допустимого времени заданий в системе в условиях переменной нагрузки построим замкнутый контур регулирования. Структурная схема исследуемой системы представлена на рис. 2.

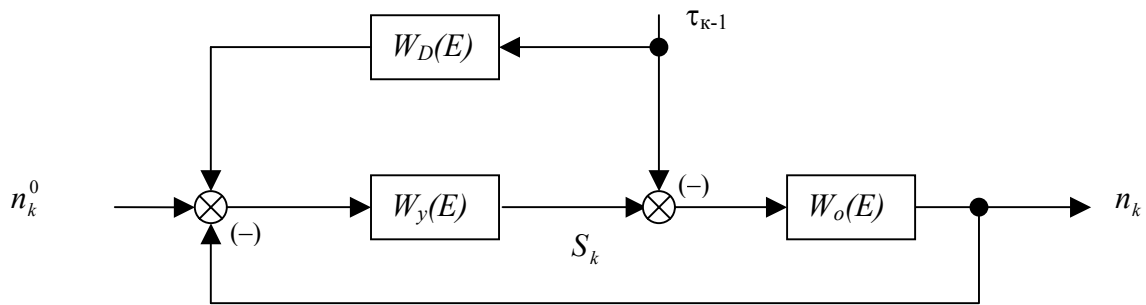


Рис. 2. Структурная схема системы регулирования времени пребывания задания в системе

В соответствии с рис. 2. в качестве регулируемой координаты рассматривается время пребывания заявки в системе n_k . Величина n_k^0 устанавливается на этапе проектирования и принимается за оптимальное значение. Величину $\tau_{k-1} = t_k - t_{k-1}$ будем интерпретировать как возмущение.

Кроме того, на рис. 2 приняты следующие обозначения: $W_y(E)$ – оператор управляющего устройства; $W_o(E) = \frac{E}{E-1}$ – оператор объекта управления; $W_D(E)$ – оператор дополнительного канала (ДК) регулирования по возмущению τ_{k-1} ; S_k – управляющее воздействие.

Задача заключается в том, чтобы найти такие операторы $W_y(E)$ и $W_D(E)$, при которых имеет место:

- 1) конечное время переходного процесса системы;
- 2) нулевая установившаяся ошибка при реализации проектного значения n_k^0 ;
- 3) компенсация возмущения τ_{k-1} .

Решение задачи может быть получено путем объединения условий инвариантности и понятия конечного времени регулирования для дискретных систем, а также метода $K(E)$ -преобразования решетчатых функций [2].

3. Синтез алгоритма управления

Расчет системы включает в себя три этапа.

На первом этапе определяется передаточная функция управляющего устройства:

$$W_y(E) = \frac{1}{K(E)} \cdot \frac{M(E)}{N(E)}. \tag{5}$$

Здесь множитель $1/K(E)$ вводится в $W_y(E)$ для обеспечения воспроизведения исходной программы n_k^0 в стационарном режиме. При этом операторный многочлен

$K(E)$ обладает свойством $K(E)n_k^0 = 0$ и является $K(E)$ – преобразованием аналитически заданной функции n_k^0 .

Заметим, что при рассматриваемом методе синтеза предполагается, что объект управления не содержит сомножитель $1/K(E)$. В противном случае этот оператор из выражения (5) следовало бы исключить.

Сомножитель:

$$\frac{M(E)}{N(E)} = \frac{M_i E^i + M_{i-1} E^{i-1} + \dots + M_1 E + M_0}{E^q + N_{q-1} E^{q-1} + \dots + N_1 E + N_0}, \quad (6)$$

вводится в передаточную функцию (5) для выполнения условий конечного времени регулирования. Последнее достигается путем приравнивания нулю коэффициентов характеристического уравнения замкнутой системы, за исключением коэффициента при старшей степени E . Порядок оператора $M(E)$ определяется формулой:

$$i = \alpha + \gamma - 1,$$

где α – степень оператора $K(E)$; γ – степень знаменателя передаточной функции объекта управления; q – порядок числителя передаточной функции объекта.

На втором этапе из условия инвариантности определяется передаточная функция дополнительного канала $W_D(E)$:

$$W_D(E) = \frac{1}{W_y(E)}. \quad (7)$$

На третьем этапе находится алгоритм, для функции управления. В соответствии с рис. 2. имеем:

$$S_k = W_y(E)(n_k^0 - n_k) + W_y(E)W_D(E)\tau_{k-1}. \quad (8)$$

После нахождения $W_y(E)$ и $W_D(E)$ переход от уравнения (8) к рекуррентному соотношению для вычисления управления S_k не представляет принципиальных трудностей. Отсюда искомая производительность обслуживающего устройства на k -ом шаге:

$$\mu_k = \frac{1}{S_k}. \quad (9)$$

Пример. Требуется определить производительность μ_k сервиса на k -ом шаге оперативного управления при обслуживании случайного потока заданий.

- В соответствии с (5) находим передаточную функцию органа управления:

$$W_y(E) = \frac{M_0}{E}. \quad (10)$$

- Определяем передаточную функцию разомкнутой системы:

$$W(E) = W_0(E) \cdot W_y(E) = \frac{E}{E-1} \cdot \frac{M_0}{E} = \frac{R(E)}{Q(E)}. \quad (11)$$

- Составляем характеристическое уравнение замкнутой системы $P(E) = 0$ и, используя условия конечного времени переходного процесса, находим неизвестный параметр M_0 :

$$P(E) = Q(E) + R(E) = E + (M_0 - 1) = 0.$$

- Положив $M_0 - 1 = 0$, получим $M_0 = 1$. Тогда, из формулы (10):

$$W_y(E) = \frac{1}{E}. \quad (12)$$

- С учетом (7) определяем оператор канала регулирования по возмущению:

$$W_D(E) = E. \tag{13}$$

- По формуле (8) вычисляем искомое время обслуживания k-го требования:

$$S_k = n_{k-1}^0 - n_{k-1} + t_k - t_{k-1}. \tag{14}$$

Величины $n_{k-1}^0, n_{k-1}, t_{k-1}$ извлекаются из блока памяти обслуживающего устройства.

- Далее из выражения (9) определяем производительность сервиса на k-ом шаге:

$$\mu_k = \frac{1}{S_k}. \tag{15}$$

4. Вычислительный эксперимент

С целью проверки эффективности предлагаемого алгоритма управления был проведен вычислительный эксперимент. При этом была построена вычислительная модель структурной схемы, приведенной на рис. 2. В качестве возмущающего воздействия был принят пуассоновский поток с интенсивностью $\lambda = 4$ заявки в секунду. Характер изменения потока представлен на рис. 3, а выход системы – на рис. 4.

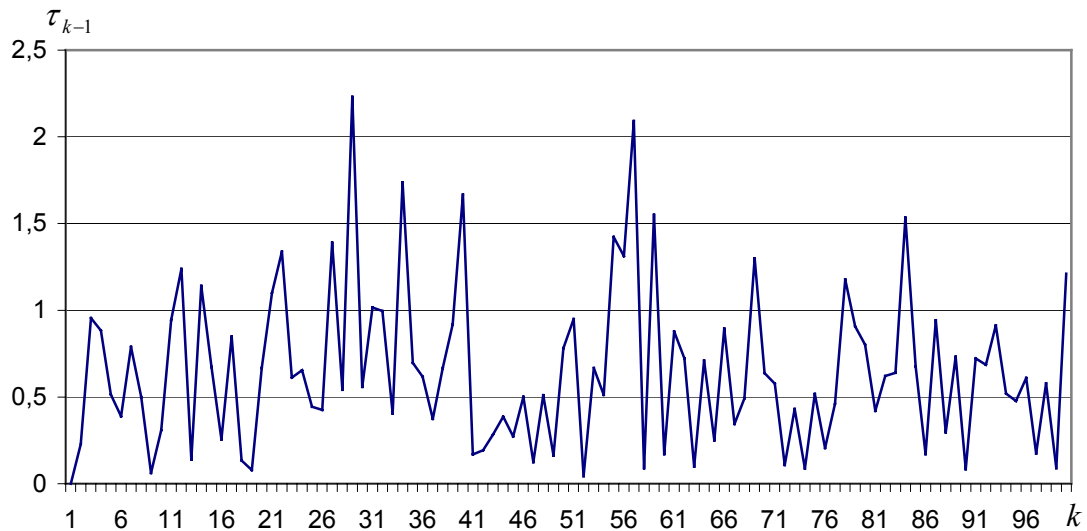


Рис. 3. График зависимости τ_{k-1} (интерпретируемой как возмущение) от k при входном параметре

$$n_k^0 = 0.5[c]$$

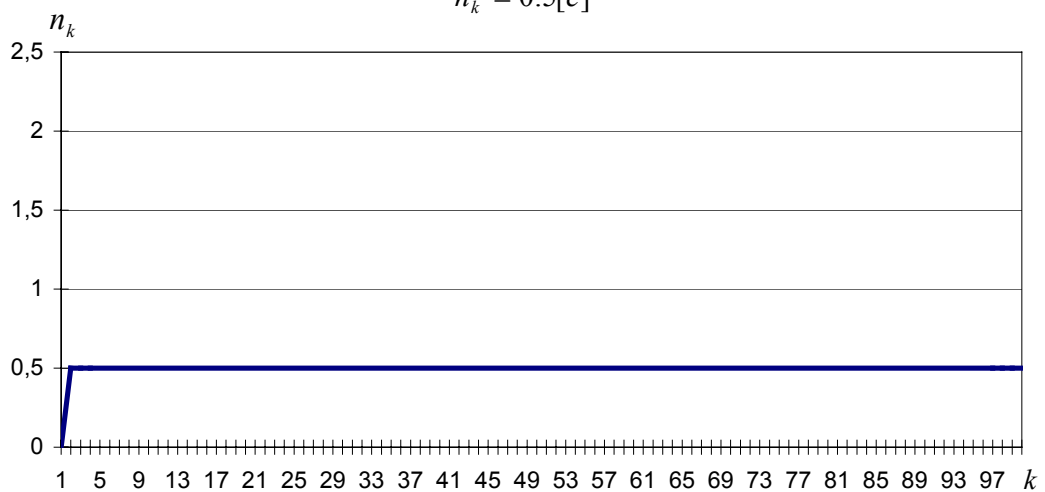


Рис. 4. График зависимости времени пребывания задания в системе n_k системы оперативного управления от k при входном параметре $n_k^0 = 0.5[c]$

Из рис. 4 видно, что переходное движение в системе завершается за один такт и время пребывания заданий в системе принимает желаемое значение, что и требовалось.

Однако высокая эффективность разработанной модели достигается за счет того, что сервисное устройство работает в переменном режиме обслуживания, что показано на рис. 5.

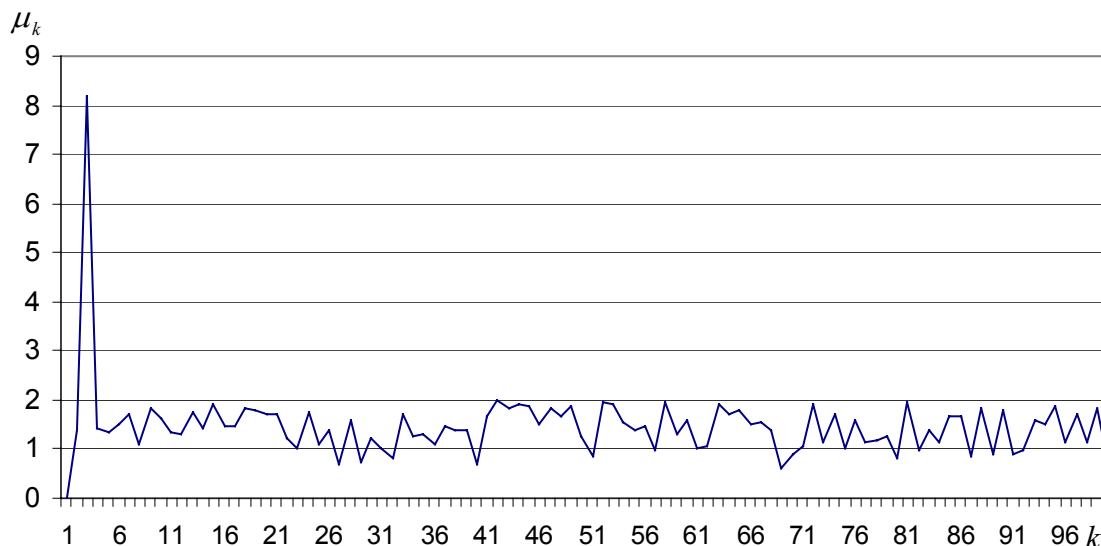


Рис. 5. Требуемая производительность μ_k обслуживающего блока оперативного управления временем пребывания задания в системе от k

5. Заключение

Показано, что задача обеспечения наилучшего воспроизведения проектного значения времени нахождения заданий в системе, в условиях меняющейся нагрузки может быть, в частности, решена путем построения для одноканальной СМО замкнутой системы комбинированного регулирования с использованием принципа инвариантности и метода К(Е)-преобразования решетчатых функций. Процедура расчета сводится к решению алгебраических задач, что существенно упрощает ее практическое использование.

6. Литература

1. Калашников В. В., Рачев С. Т. Математические методы построения стохастических моделей обслуживания. – Москва: Наука, 1988.
2. Никольский В. А. Метод шагового регулирования длины очереди в мультипроцессорной вычислительной системе с переменным режимом обслуживания, Автоматика и вычислительная техника, 1998, №6. С.61-70.